EJERCICIOS DE MÍNIMOS CUADRADOS

1) Ajustar los siguientes datos a una parábola por mínimos cuadrados.

x	-1	0	3	7
f(x)	2	0	4	7

IMPORTANTE !
Hay que prestar mucha atención a si nos piden una parábola o una recta. En este caso se pide una parábola, por lo que sabemos que tenemos que calcular una ecuación de **segundo grado**, pero si nos pidiesen una recta, la ecuación debería ser de primer grado.

Solución:

En este caso el sistema de ecuaciones, en forma matricial, será:

$$\begin{pmatrix} n & sx & sx2 \\ sx & sx2 & sx3 \\ sx2 & sx3 & sx4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sy \\ sxy \\ sx2y \end{pmatrix}$$

	S_j	S_j^2	S_j^3	S_j^4	Y_i	Sj*Yi	Sj2*Yj	n
	-1	1	-1	1	2	-2	2	
	0	0	0	0	0	0	0	
	3	9	27	81	4	12	36	
	7	49	343	2401	7	49	343	
Sumatorio	**9**	**59**	**369**	**2483**	**13**	**59**	**381**	**4**

$$\begin{pmatrix} 4 & 9 & 59 \\ 9 & 59 & 369 \\ 59 & 369 & 2483 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 59 \\ 381 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 13 = 4 \cdot a_0 + 9 \cdot a_1 + 59 \cdot a_2 \\ 59 = 9 \cdot a_0 + 59 \cdot a_1 + 369 \cdot a_2 \\ 381 = 59 \cdot a_0 + 369 \cdot a_1 + 2483 \cdot a_2 \end{cases}$$

$\rightarrow$ Resolvemos el sistema por Cramer:

NOTA:
Si solo se pide obtener la expresión de la función de ajuste por mínimos cuadrados, no es necesario realizar el desarrollo previo al sistema que podemos ver en los apuntes. No obstante, hay que saber hacerlo porque podrían pedírnoslo.

$$\begin{vmatrix} 4 & 9 & 59 \\ 9 & 59 & 369 \\ 59 & 369 & 2483 \end{vmatrix} = 26720$$

$$a_0 = \frac{\begin{vmatrix} 13 & 9 & 59 \\ 59 & 59 & 369 \\ 381 & 369 & 2483 \end{vmatrix}}{26720} = \frac{39424}{26720} = 1'47545$$

$$a_1 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 13 & 59 \\ 9 & 59 & 369 \\ 59 & 381 & 2483 \end{vmatrix}}{26720} = \frac{13076}{26720} = 0'489371$$

$$a_2 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 9 & 13 \\ 9 & 59 & 59 \\ 59 & 369 & 381 \end{vmatrix}}{26720} = \frac{1220}{26720} = 0'0456587$$

$$\boxed{p(x) = 1'47545 + 0'48937x + 0'045658x^2}$$

2) Considerando los puntos (0’1,-1), (0’8,0´95), (1´2,1´8), (1´2,1´9), (1´7,2´1) y (2´5, 3´6), obtener un polinomio de tercer grado de la forma p(x)= a + bx³ que sea el ajuste por mínimos cuadrados.

En este caso, el ejercicio presenta cierta **dificultad añadida**, ya que el polinomio que queremos conseguir no tiene término ni en x ni en x². Así pues, utilizaremos el mismo procedimiento, usando una matriz 2x2 de la siguiente manera:

	Sj	S_j^3	S_j^6	Y_j	S_j*Y_j	$S_j^2*Y_j$	$S_j^3*Y_j$
	0´1	0´001	$0'1\cdot 10^{-6}$	-1	-0´1	-0´01	-0’001
	0´8	0´512	0’262144	0´95	0´76	0´608	0’4864
	1´2	1´728	2’985984	1´8	2´16	2´592	3’1104
	1´2	1´728	2’985984	1´9	2´28	2´736	3’2832
	1´7	4´913	24’137569	2´1	3´57	6´069	10’3173
	2´5	15´625	244’140625	3´6	9´00	22´5	56’25
Sumatorio	**7´5**	**24´507**	**274’5123061**	**9´35**	**17´67**	**34,495**	**73’4463**

$$\begin{pmatrix} n & sx3 \\ sx3 & sx6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sy \\ sx3y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 6 & 24'507 \\ 24'507 & 274'512307 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9'35 \\ 73'4463 \end{pmatrix}$$

Esta matriz se obtiene de realizar el mínimo de la función f(a,b) que nos están pidiendo, llegando a los valores sx3 y sx6 y sy y sx3y.

→ Resolvemos el sistema por Cramer, como en el ejercicio anterior:

$$\begin{vmatrix} 6 & 24'507 \\ 24'507 & 274'512307 \end{vmatrix} = 1046'480793$$

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{\begin{vmatrix} 9'35 & 24'507 \\ 73'4463 & 274'512307 \end{vmatrix}}{1046'480793} = \frac{766'7415964}{1046'480793} = 0'73268578 \\ a_3 &= \frac{\begin{vmatrix} 6 & 9'35 \\ 24'507 & 73'4463 \end{vmatrix}}{1046'480793} = \frac{211'53735}{1046'480793} = 0'202141646 \end{aligned}\right\}$$

$$\boxed{p(x) = 0'73268578 + 0{,}202141646x^3}$$