INTERPOLACIÓN DE LAGRANGE ESQUEMA

INTERPOLAR: consiste en encontrar una función p(x) tal que en (n + 1) puntos {x0, x1, · · · , xn} ella y/o algunas de sus derivadas tomen valores dados. Dicha función p(x) se denomina FUNCIÓN INTERPOLADORA sobre el SOPORTE {x0, xn}.

Si sólo se obliga a que la función p(x) tome los valores dados {f0, f1, · · · , fn} en el soporte x0, x1, ..., xn el proceso de interpolación se conoce con el nombre de **INTERPOLACION DE LAGRANGE**.

Teorema 1: Dado el soporte de n+1 puntos {ti} {x0, x1, · · · , xn} y los n+1 valores fi=f(xi) {f0, f1, · · · , fn}, existe un único **polinomio interpolador**, Pn(x), que verifica: Pn(xi) = fi (i = 0, · · · , n)

Además, dicho polinomio se puede obtener mediante:

SI EL GRADO ES PEQUEÑO:

1. Calculando la ecuación de la recta (grado 1), parábola (grado 2), …

   P. 1º GRADO (2 PUNTOS SOPORTE) {(x0, f0),(x1, f1)}: $P_1(X) = \frac{x+x_1}{x_o+x_1} f_o + \frac{x+x_o}{x_1+x_o} f_1$

   P. 2º GRADO (3 PUNTOS SOPORTE) {(x0,f0), (x1,f1), (x2,f2)}: $\begin{cases} f_0 = a \cdot {x_o}^2 + b \cdot x_o + c \\ f_1 = a \cdot {x_1}^2 + b \cdot x_1 + c \\ f_2 = a \cdot {x_2}^2 + b \cdot x_2 + c \end{cases}$

2. **Polinomios de base**: Pn(x) = Σ fi · Li(x); (i variando de 0, n)

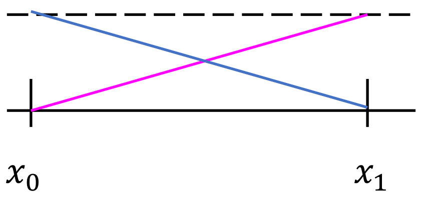
   POLINOMIOS DE BASE: Li(x) son polinomios de grado ≤ n (al multiplicarse binomios) y que la combinación lineal de ellos será, por tanto, otro polinomio de grado ≤ n. Por ello se tiene: Pn(xi) = fi · Li(xi) = fi ; (0 ≤ i ≤ n)

$$L_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - S_j}{S_i - S_j} \; ; \; \frac{x - S_1}{S_i - S_1} \cdot \frac{x - S_2}{S_i - S_2} \cdot \frac{x - S_3}{S_i - S_3} \cdots \frac{x - S_{i-1}}{S_i - S_{i-1}} \cdot \frac{x - S_{i+1}}{S_i - S_{i+1}} \cdots \frac{x - S_n}{S_i - S_n}$$

j=1 j=2 j=3 j=i-1 j=i+1 j=n

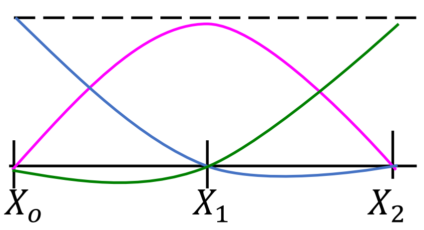
- Los polinomios Li(x) se denominan **Polinomios de Base de Lagrange** sobre el soporte; {x0, xn}.
- Tales polinomios son de grado menor o igual que n, pues en la definición aparece el producto de los binomios (x − xj), (i, j = 0, · · · , n); i ≠ j
- La suma de los polinomios de base de Lagrange obtenidos sobre un mismo soporte de interpolación es el polinomio unidad: Σ Li(x) = 1 (i varía de 0 a n)
  - toman valor 1 en el punto del soporte al que se asocian y 0 en los demás puntos del soporte.

POLINOMIO 1º GRADO (2 PUNTOS SOPORTE) {x0, x1}



$Lo(X) = \frac{x+x_1}{x_o+x_1}$; $L_1(X) = \frac{x+x_o}{x_1+x_o}$

POLINOMIO 2º GRADO (3 PUNTOS SOPORTE) {x0, x1, x2}



$$\begin{cases} Lo(X) = \frac{x+x_1}{x_o+x_1} \cdot \frac{x+x_2}{x_o+x_2} \\ L_1(X) = \frac{x+x_o}{x_1+x_o} \cdot \frac{x+x_2}{x_1+x_2} \\ L_2(X) = \frac{x+x_o}{x_2+x_o} \cdot \frac{x+x_1}{x_2+x_1} \end{cases}$$

3. Fórmula de Newton. Diferencias divididas.

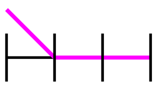
$$
\begin{array}{lllll}
 & & j=1 & j=2 & j=3 \qquad\qquad j=n \\
i=0 & x_0 \to & f_0 & f[x_0,x_1]=\dfrac{f_1-f_0}{x_1-x_0} & f[x_0,x_1,x_2]=\dfrac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0} \quad \ldots \\
i=1 & x_1 \to & f_1 & f[x_1,x_2]=\dfrac{f_2-f_1}{x_2-x_1} & \ldots \quad f[x_0,\ldots,x_n]=\dfrac{f[x_1,\ldots,x_n]-f[x_0,\ldots,x_{n-1}]}{x_n-x_0} \\
i=2 & x_2 \to & f_2 & \ldots & \\
 & \ldots & \ldots & & \\
 & x_{n-2} \to & f_{n-2} & f[x_{n-2},x_{n-1}]=\dfrac{f_{n-1}-f_{n-2}}{x_{n-1}-x_{n-2}} & f[x_{n-2},x_{n-1},x_n]=\dfrac{f[x_{n-1},x_n]-f[x_{n-2},x_{n-1}]}{x_n-x_{n-2}} \quad \ldots \\
 & x_{n-1} \to & f_{n-1} & & \\
i=n & x_n \to & f_n & f[x_{n-1},x_n]=\dfrac{f_n-f_{n-1}}{x_n-x_{n-1}} &
\end{array}
$$

NEWTON: $P(x)=f[S_1]+f[S_1S_2](x-S_1)+f[S_1S_2S_3](x-S_1)(x-S_2)\ldots$ A(i,1)=f_i; $A(i,j)=\frac{A(i+1,j-1)-A(i,j-1)}{S_{j-1+i}-S_i}$; I (1,n-(j-1))

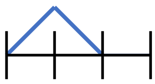
<u>SI EL GRADO ES ELEVADO. NATURALEZA OSCILANTE:</u> INTERPOLACIÓN POLINÓMICA **A TROZOS:**

1ºGRADO: Obtener la función polinómica a trozos de 1º grado dados los puntos: (0,2),(1,-1),(2,3),(3,1); $\{Si, fi)\}$ donde i varía de 1 a 4, mediante polinomios de base:

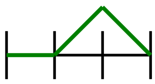
$$\boldsymbol{\varphi_1(X)}=\begin{cases}\frac{x-1}{0-1}=1-x;\, x\epsilon[0,1]\\ 0 \qquad ;\, x\epsilon[1,3]\end{cases}$$



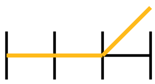
$$\boldsymbol{\varphi_2(X)}=\begin{cases}\frac{x-0}{1-0}=x\,;\, x\epsilon[0,1]\\ \frac{x-2}{1-2}=2-x;\, x\epsilon[1,2]\\ 0 \qquad ;\, x\epsilon[2,3]\end{cases}$$



$$\boldsymbol{\varphi_3(X)}=\begin{cases}0 \qquad ;\, x\epsilon[0,1]\\ \frac{x-1}{2-1}=x-1\,;\, x\epsilon[1,2]\\ \frac{x-3}{2-3}=3-x\,;\, x\epsilon[2,3]\end{cases}$$



$$\boldsymbol{\varphi_4(X)}=\begin{cases}0 \qquad ;\, x\epsilon[0,2]\\ \frac{x-2}{3-2}=x-3\,;\, x\epsilon[2,3]\end{cases}$$



<u>FUNCIÓN INTERPOLADORA</u>

g(x)=$\begin{cases}f_1\cdot\varphi_1(X)+f_2\cdot\varphi_2(X);\ x\epsilon[0,1]\\ f_2\cdot\varphi_2(X)+f_3\cdot\varphi_3(X);\, x\epsilon[0,1]\\ f_3\cdot\varphi_3(X)+f_4\varphi_4(X);\, x\in[2,3]\end{cases}$

SOLUCIÓN: g(x)=$\begin{cases}2-3x;\, x\in[0,1]\\ -5+4x;\, x\in[1,2]\\ 7-2x;\, x\in[2,3]\end{cases}$ //

☺ Si me piden la función en un punto lo meto en el intervalo correspondiente: p.ej g(2,8)=7-2·2.8

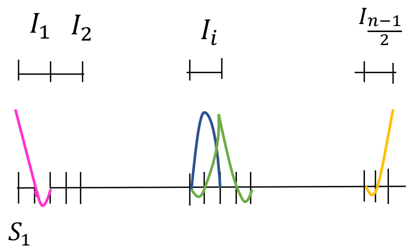
2ºGRADO: GENERAL (con n puntos:$\frac{n-1}{2}$ subintervalos; si es ec de 2º grado cojo dos trozos por intervalo)

$$\varphi_1(X)=\begin{cases}\dfrac{x-S_2}{S_1-S_2}\cdot\dfrac{x-S_3}{S_1-S_3};\, x\epsilon[S_1,S_3]\\ 0 \qquad ;\, x\epsilon[S_3,S_n]\end{cases}$$

$$\varphi_{2i}(X)=\begin{cases}\dfrac{x-S_{2i-1}}{S_{2i}-S_{2i-1}}\cdot\dfrac{x-S_{2i+1}}{S_{2i}-S_{2i+1}};\, x\epsilon[S_{2i-1},S_{2i+1}]\\ 0 \qquad x\epsilon[S_1,S_{2i-1}]\cup[S_{2i+1},S_N]\end{cases}$$

$$\varphi_{2i+1}(X)=\begin{cases}\dfrac{x-S_{2i-1}}{S_{2i+1}-S_{2i-1}}\cdot\dfrac{x-i}{S_{2i+1}-S_{2i}};\, x\epsilon[S_{2i-1},S_{2i+1}]\\ \dfrac{x-S_{2i+2}}{S_{2i+1}-S_{2i+2}}\cdot\dfrac{x-S_{2i+3}}{S_{2i+1}-S_{2i+3}};\, x\epsilon[S_{2i+1},S_{2i+3}]\\ 0 \qquad x\epsilon[S_1,S_{2i-1}]\cup[S_{2i+3},S_N]\end{cases}$$

$$\varphi_n(X)=\begin{cases}0 \qquad ;\, x\epsilon[S_1,S_{n-2}]\\ \dfrac{x-S_{n-1}}{S_n-S_{n-1}}\cdot\dfrac{x-S_{n-2}}{S_n-S_{n-2}};\, x\epsilon[S_{n-2},S_n]\end{cases}$$



☺ Ahora en los polinomios de base no dibujamos rectas ya que son ecuaciones de 2º grado (parábolas), si fuera de 3º grado pintaríamos las funciones correspondientes.