EJERCICIO INTERPOLACIÓN DE LAGRANGE. PRIMER PARCIAL 4/11/2020

En un reactor químico se ha medido la temperatura (T) que se alcanza en 5 posiciones dadas por x={0,1,5,7,10}, obteniendo la siguiente tabla:

x (metros)	0	1	5	7	10
T (Kelvin)	280	380	300	294	225

Se pide:

a) Estimar el valor del flujo calorífico, Φ=-D·T´(x) (siendo T temperatura y T'(x) su derivada), en los puntos x=5,5 y x=7,5; sabiendo que el coeficiente de difusión de calor es D= 0.15m^2/s, empleando para ello una función interpoladora que tome como soporte los puntos situados en posiciones {5,7,10}.

En primer lugar, como el polinomio interpolador toma como soporte tres puntos, sabemos que el grado del mismo será menor o igual a 2, adoptando la siguiente forma:
$P(x)= C_1 + C_2x + C_3x^2$

- <u>A partir de la definición de polinomio interpolador:</u>

P(x) = F(x); por tanto:
P(5)= T(5)
P(7)= T(7) ; siendo 5, 7 y 10 los puntos de soporte
P(10)= T(10)

El sistema de ecuaciones a partir del cual se podrán conocer los coeficientes que acompañan a la incógnita x (C_1, C_2, C_3) en el polinomio interpolador que buscamos obtener es:

$$\left.\begin{array}{l} C_1 + C_2\cdot 5 + C_3\cdot 5^2 = 300 \\ C_1 + C_2\cdot 7 + C_3\cdot 7^2 = 294 \\ C_1 + C_2\cdot 10 + C_3\cdot 10^2 = 225 \end{array}\right\}$$

Se particulariza la variable x, sustituyéndose por los valores sobre los que se sitúan los puntos de soporte.

Los polinomios se igualan a los valores conocidos que toma la función temperatura en los puntos de soporte.

Mediante el método que se prefiera se resuelve el sistema anterior, obteniéndose:
$C_1 = 175$
$C_2 = 45$
$C_3 = -4$

De esta manera ya hemos conseguido conocer la función interpoladora: $\boxed{P(x) = 175 + 45x - 4x^2}$

- Esta ecuación también se puede obtener a través de los <u>polinomios de base de Lagrange</u>:

Primero se realizan los polinomios de base en cada punto del soporte y se multiplican por el valor de la función en dicho punto. Posteriormente se suman estos productos:

$L_5(x) = \frac{(x-7)(x-10)}{(5-7)(5-10)}$; $L_7(x) = \frac{(x-5)(x-10)}{(7-5)(7-10)}$; $L_{10}(x) = \frac{(x-5)(x-7)}{(10-5)(10-7)}$

$P(x) = T(5)\cdot L_5 + T(7)\cdot L_7 + T(10)\cdot L_{10} = 300 \cdot \frac{(x-7)(x-10)}{10} + 294 \cdot \frac{(x-5)(x-10)}{-6} + 225 \cdot \frac{(x-5)(x-7)}{15}$ = (operando)

= 175 + 45x – 4x^2 (se comprueba que el resultado obtenido coincide)

Para obtener el valor del flujo calorífico (Φ=-D·T´(x)) se requiere de la derivación de dicho polinomio:

P'(x) = 45 – 8x

Si ahora se particulariza para x= 5,5 y x= 7,5:

$$\left.\begin{array}{l} P'(5{,}5)= 45 - 8\cdot(5{,}5) = 1 \\ P'(7{,}5)= 45 - 8\cdot(7{,}5) = -15 \end{array}\right\} \quad \boxed{\begin{array}{l} \Phi_{5,5}= -0{,}15\cdot 1 = -0{,}15 \\ \Phi_{7,5}= -0{,}15\cdot(-15)= 2{,}25 \end{array}}$$

b) Obtener y representar gráficamente la función de base asociada al punto x=10, tomando como soporte {5,7,10} en el intervalo [5,10].

$$\Phi(x) = \frac{(x-5)(x-7)}{(10-5)(10-7)} = \frac{(x-5)(x-7)}{15} = \frac{1}{15}\cdot\ (x^2\text{-}12x+35)$$

Sustituyendo los valores de soporte:

$$\Phi(5)= \frac{1}{15}\cdot\ (5^2\text{-}12\cdot 5+35)= 0$$

$$\Phi(7)= \frac{1}{15}\cdot\ (7^2\text{-}12\cdot 7+35)= 0$$

$$\Phi(10)= \frac{1}{15}\cdot\ (10^2\text{-}12\cdot 10+35)= 1$$

La representación gráfica será: