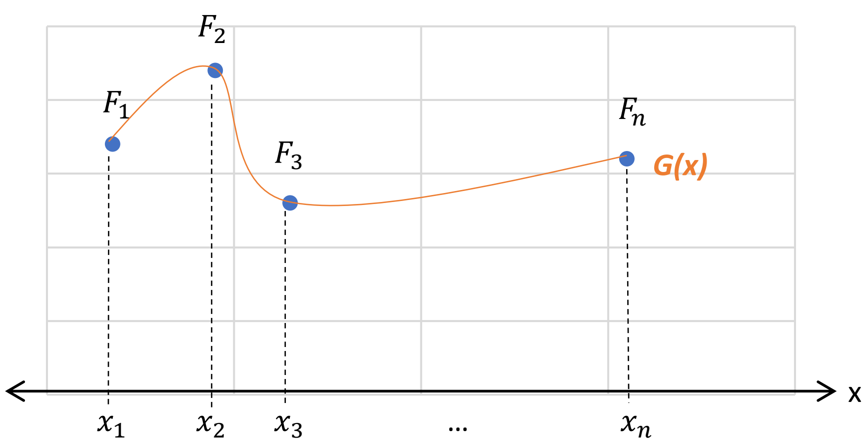
ALGORITMOS PARA EL CÁLCULO CIENTÍFICO

Se denomina interpolación, en el subcampo matemático del análisis numérico, a la obtención de nuevos puntos partiendo del conocimiento de un conjunto discreto de puntos.
Es decir, interpolar consiste en encontrar una función *p(x)*, tal que en *(n+1)* puntos: $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, ella y/o alguna de sus derivadas tomen valores dados. Dicha función se denomina FUNCIÓN INTERPOLADORA sobre el SOPORTE $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$.

INTERPOLACIÓN POLINÓMICA DE LAGRANGE:

En análisis numérico, el **polinomio de Lagrange**, llamado así en honor a Joseph-Louis de Lagrange, es una forma de presentar el polinomio que interpola un conjunto de puntos dado.

Ejemplo: se tienen los valores de las coordenadas espaciales (x) y la temperatura (F)



Donde:
$\boldsymbol{F_i}$ **:** son los valores de la función que se interpola.
$\boldsymbol{x_i}$ **:** es el soporte de interpolación (Stencil of interpolation)

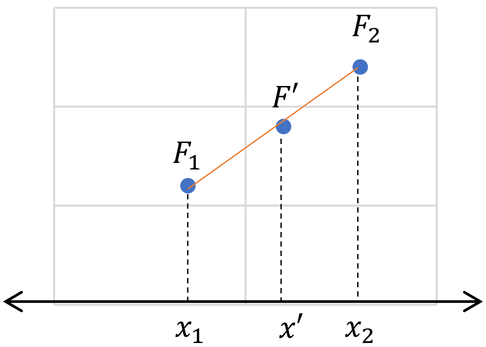
Siendo por lo tanto G(x) la función aproximadora de $\boldsymbol{F_i}$, verificándose así que:
G(x_i) = $\boldsymbol{F_i}$ siendo **i=1,…,n.**

Para que la interpolación pueda realizarse, la función aproximadora G(x) debe ser un polinomio. Es decir, una sumada de monomios.

$$p\,(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \cdots + a_i x^{i-1} + \cdots + a_{n+1} x^n : Polinomio\ de\ grado\ n$$

Donde G(x) va a ser de P(x): polinomio de grado menor o igual que n.

Primer caso particular: $R(x) = a_1 + a_2 x$



Aplicación de la definición de interpolación de Lagrange:

$$\begin{Bmatrix} R(x_1) = F_1 \\ R(x_2) = F_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_1 + a_2 x_1 = F_1 \\ a_1 + a_2 x_2 = F_2 \end{Bmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow a_2(x_2 - x_1) = F_2 - F_1 \Longrightarrow \boldsymbol{a_2} = \frac{F_2 - F_1}{x_2 - x_1}$$

$$a_1 = F_1 - a_2 x_1 = F_1 - \frac{F_2 - F_1}{x_2 - x_1} . x_1 \Longrightarrow \boldsymbol{a_1} = \frac{F_1 x_2 - x_1 F_2}{x_2 - x_1}$$

Luego:

$$R(x) = \frac{F_1 x_2 - x_1 F_2}{x_2 - x_1} + \frac{F_2 - F_1}{x_2 - x_1}$$

Para x'

$$F' = R(x') = \frac{F_1 x_2 - x_1 F_2}{x_2 - x_1} + \frac{F_2 - F_1}{x_2 - x_1} . x'$$

El polinomio **R(x)** se puede expresar también como:

- Al ser F_1 el valor de la función conocido en x_1 y F_2 el valor de la función conocido en x_2:

$$R(x) = \boldsymbol{L_1}(x)\, F_1 + \boldsymbol{L_2}(x)\, F_2$$

$$\boldsymbol{L_1}(x) = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2}; \quad \boldsymbol{L_2}(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Luego, **R(x)** $= \dfrac{x - x_2}{x_1 - x_2} F_1 + \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} F_2$

$\boldsymbol{L_1(x)}$ y $\boldsymbol{L_2(x)}$ son polinomios de base de Lagrange.

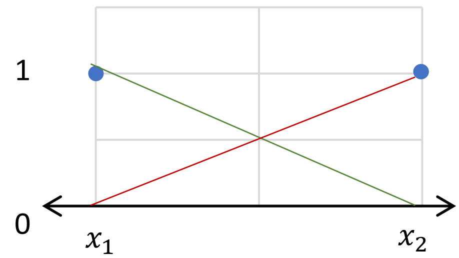
Los **polinomios de Lagrange** son polinomios de grado **n-1**, cuando el soporte es de n puntos. Además, los polinomios de Lagrange verifican:

$$\boxed{L_i(x_j) = \Delta ij = \begin{Bmatrix} 1 \; si \; x_j = x_i \;\; (es \; decir, j = i) \\ 0 \; si \; x_j \neq x_i \; (es \; decir, j \neq i) \end{Bmatrix}}$$

Delta de Dirac.

$$L_1(x_1) = \frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_2} = 1\ ;\ L_1(x_2) = \frac{x_2 - x_2}{x_1 - x_2} = 0$$

$$L_2(x_2) = \frac{x_2 - x_1}{x_2 - x_1} = 1\ ;\ L_2(x_1) = \frac{x_1 - x_1}{x_2 - x_1} = 0$$

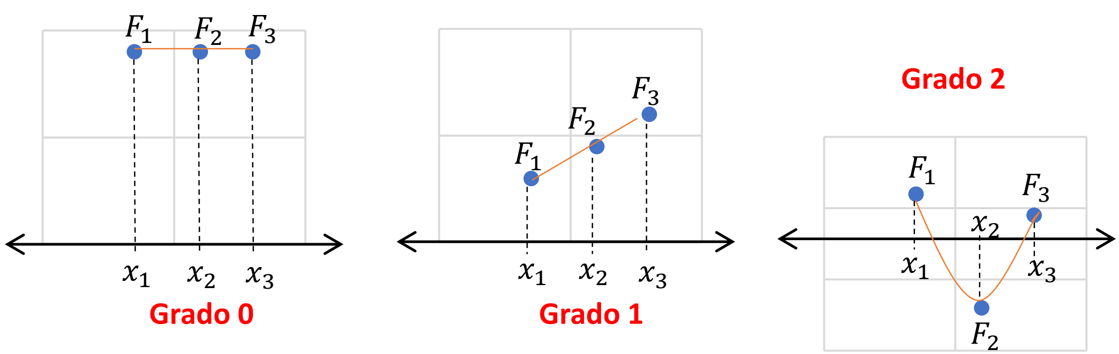


En los puntos de soporte $\{x_1, x_2\}$ los polinomios de base de Lagrange toman los valores 1 o 0. En el resto de puntos, estos tomarán los valores determinados por el polinomio que los defina.

$$\mathbf{R}(x_1) = \frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_2} F_1 + \frac{x_1 - x_1}{x_2 - x_1} F_2 = F_1$$

$$\mathbf{R}(x_2) = \frac{x_2 - x_2}{x_1 - x_2} F_1 + \frac{x_2 - x_1}{x_2 - x_1} F_2 = F_2$$

Segundo caso particular:



Como tenemos tres puntos, el **grado** del polinomio interpolador es **menor o igual a dos**. Puede suceder que los tres valores $\{F_1, F_2, F_3\}$ estén alineados formando una línea recta. Esta puede ser constante, correspondiendo así con un polinomio de grado 0, o presenta una pendiente y ser de grado 1.

El polinomio interpolador, entonces, se podrá obtener mediante:

1. Aplicación de la definición de interpolación de Lagrange:

$$\begin{Bmatrix} R(x_1) = F_1 \\ R(x_2) = F_2 \\ R(x_3) = F_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_1 + a_2 x_1 + a_3 x_1^2 = F_1 \\ a_1 + a_2 x_2 + a_3 x_2^2 = F_2 \\ a_1 + a_2 x_3 + a_3 x_3^2 = F_3 \end{Bmatrix}$$ Se resuelve obteniendo $a_1, a_2\ y\ a_3$.

2. Aplicación de los polinomios de base:

Al ser F_1 el valor de la función conocido en x_1 y F_2 el valor de la función conocido en x_2 y F_3 el valor de la función conocido en x_3.

R(x) = L_1 (x) F_1 + L_2 (x) F_2 + L_3 (x) F_3

$$L_1(x) = \frac{(X - x_2)(X - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)};\ L_2(x) = \frac{(X - x_1)(X - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)};\ L_3\,(x) = \frac{(X - x_1)(X - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

Luego:

$$R(x) = \frac{(X - x_2)(X - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} F_1 + \frac{(X - x_1)(X - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} F_2 + \frac{(X - x_1)(X - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} F_3$$

$L_1\,(x_1) = 1;\ L_1\,(x_2) = 0;\ L_1\,(x_3) = 0$
$L_2\,(x_1) = 0;\ L_2\,(x_2) = 1;\ L_2\,(x_3) = 0$
$L_3\,(x_1) = 0;\ L_3\,(x_2) = 0;\ L_3\,(x_3) = 1$

Ejemplo: conocemos los valores de las concentraciones de ciertas sustancias, F = (18, 12, 23), en los puntos x = (0, 1, 4'5). Se pide obtener la concentración, aproximadamente, en el punto x=2.

1. Aplicación de la definición de interpolación de Lagrange:

$$\left\{\begin{array}{c} R(0) = 18 \\ R(1) = 12 \\ R(4{,}5) = 23 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} a_1 + 0 + 0 = 18 \\ a_1 + a_2 + a_3 = 12 \\ a_1 + 4{,}5a_2 + 20{,}25a_3 = 23 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} a_1 = 18 \\ a_2 + a_3 = -6 \Longrightarrow a_2 = -\frac{506}{63} \\ 4{,}5a_2 + 20{,}25a_3 = 5 \Longrightarrow a_3 = \frac{128}{63} \end{array}\right.$$

$$R(x) = 18 - \frac{506}{63}x + \frac{128}{63}x^2 \xrightarrow{x = 2} R(2) = 18 - \frac{506}{63}.2 + \frac{128}{63}2^2 = \frac{634}{63}$$

2. Aplicación de los polinomios de base:

$$L_1(x) = \frac{(X - 1)(X - 4{,}5)}{(0-1)(0-4{,}5)};\ L_2(x) = \frac{(X - 0)(X - 4{,}5)}{(1-0)(1-4{,}5)};\ L_3\,(x) = \frac{(X - 0)(X - 1)}{(4{,}5 - 0)(4{,}5 - 1)}$$

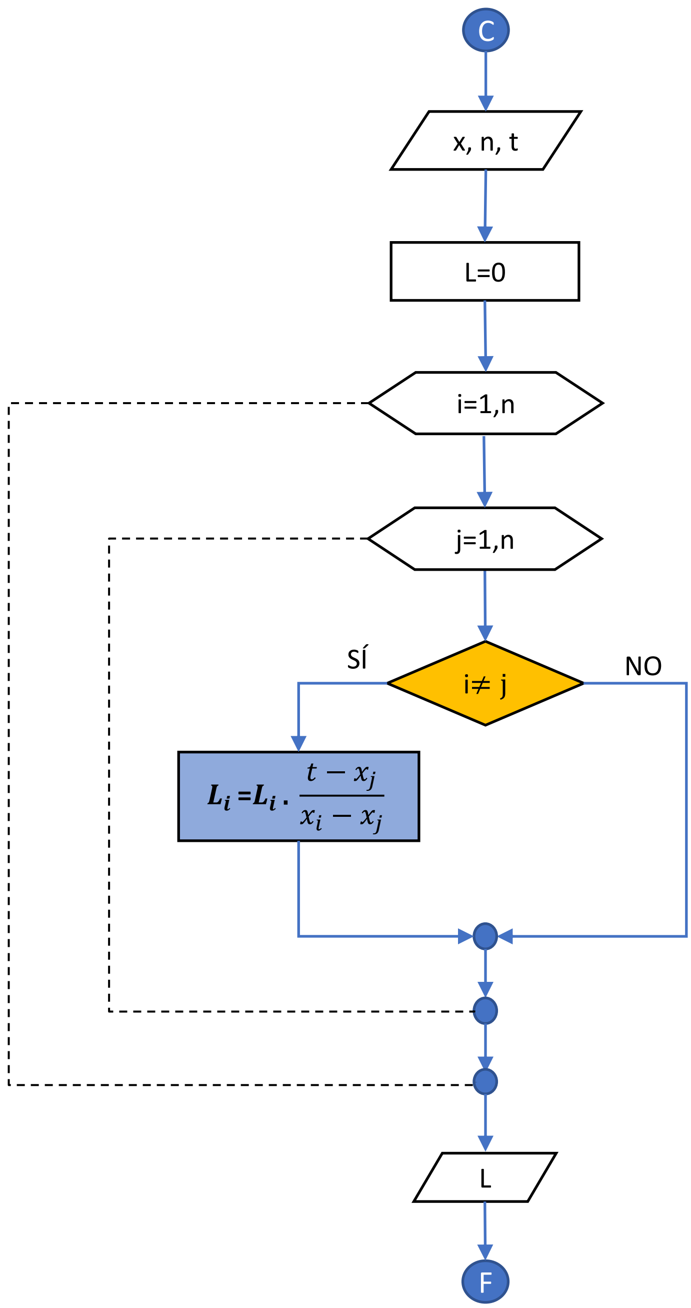
Luego:

$$R(x) = \frac{(X - 1)(X - 4{,}5)}{4{,}5}18 - \frac{X\,(X - 4{,}5)}{3{,}5}12 + \frac{X\,(X - 1)}{15{,}75}23 \xrightarrow{x = 2} R(2) = \frac{634}{63}$$

Generalización de los polinomios de base: R(x) = L_1 (x) F_1 + $L_2\ (x)\ F_2$ +... + L_n (x) F_n

$$L_i(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_1)(x_i-x_2)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)} \Longrightarrow \boxed{L_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}\ (i = 1, \ldots, n)}$$

ORGANIGRAMA: R(x) = $\sum_{i=0}^{n} F_i$ L_i (x)



M2/2020

ACLARACIÓN: Si dicen INTERPOLACIÓN DE LAGRANGE, nos están diciendo que el polinomio y la función son iguales en los puntos de soporte. Si aparecen derivadas, entonces es INTERPOLACIÓN DE HERMITE.

Ejercicio de asimilación:
De una función se conoce el valor que toma en un punto b y su primera derivada. Además, tambien se conoce el valor que toma en c y su primera derivada. Queremos determinar el polinomio interpolador.

$$\left\{\begin{array}{c} f(b) = R(b) \\ f'(b) = R'(b) \\ f(c) = R(c) \\ f'(c) = R'(c) \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

Como las condiciones dadas son 4, el grado del polinomio interpolador será 3 o menos.

$$R(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3$$

$$R'(x) = a_2 + 2a_3x + 3a_4x^2$$

$$R(b) = f(b) \Longrightarrow a_1 + a_2b + a_3b^2 + a_4b^3$$
$$R'(b) = f'(b) \Longrightarrow a_2 + 2a_3b + 3a_4b^2$$
$$R(c) = f(c) \Longrightarrow a_1 + a_2c + a_3c^2 + a_4c^3$$
$$R'(c) = f'(c) \Longrightarrow a_2 + 2a_3c + 3a_4c^2$$

Resolver el sistema de ecuaciones