PROBLEMA INTERPOLACIÓN POLINÓMICA DE LAGRANGE POR POLINOMIOS DE BASE

1.

Dada la siguiente tabla donde **y** es la **amplitud de la oscilación** de un péndulo (en **cm**) ; y **x** el **tiempo** medido desde que inició la oscilación (en **min**).

Encontrar el polinomio interpolador de Lagrange que pasa por los puntos 1, 2 y 3 y el valor de y correspondiente a x=2min. Hacerlo mediante **sistema de ecuaciones y polinomios de base de Lagrange.**

Punto	0	1	2	3	4
x	0	2.5	5	7.5	10
y	10	4.97	2.47	1.22	0.61

SOLUCIÓN:

El polinomio interpolador debe ser de grado menor o igual que 2 (Tenemos 3 condiciones). Tendrá forma de curva (parábola).

Condiciones:

Punto 1 → y(2.5)= P(2.5)= 4.97

Punto 2 → y(5)= P(5)= 2.47

Punto 3 → y(7.5)= P(7.5)= 1.22

El valor del polinomio en los puntos del soporte debe ser igual al valor de la función en dichos puntos.

Necesitamos los datos que nos aportan los puntos 1, 2 y 3, no los del resto.

Nuestro polinomio tendrá la forma:

$P(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2$; donde a_1, a_2 y a_3 son nuestras incógnitas.

Imponemos las condiciones y resulta el sistema de ecuaciones:

Si x=2.5 → $P(2.5) = a_1 + 2.5a_2 + 2.5^2\, a_3 = 4.97$

Si x=5 → $P(5) = a_1 + 5a_2 + 5^2\, a_3 = 2.47$

Si x=7.5 → $P(7.5) = a_1 + 7.5a_2 + 7.5^2\, a_3 = 1.22$

$$\begin{cases} a_1 + 2.5a_2 + 6.25a_3 = 4.97 \\ a_1 + 5a_2 + 25a_3 = 2.47 \\ a_1 + 7.5a_2 + 56.25a_3 = 1.22 \end{cases}$$

Ya solo quedaría resolver el sistema.

Esto podría llevarnos bastante tiempo ya que los números no son muy manejables. Por ello es preferible resolver el problema mediante polinomios de base.

POR POLINOMIOS DE BASE:

El polinomio P(x) se puede escribir como:

$P(x) = L_1(x) * y(x_1) + L_2 * y(x_2) + L_3 * y(x_3)$; L_1, L_2, L_3 son los polinomios de Base.

Recordamos la fórmula de los polinomios de Base de Lagrange:

$$L_i(x) = \prod \frac{x-x(j)}{x(i)-x(j)};\ j=1,\ldots,n\ ;j\neq i$$

Calculamos las diferentes bases:

$$L_1(x) = \frac{(x-x2)*(x-x3)}{(x1-x2)*(x1-x3)} = \frac{(x-5)*(x-7.5)}{(2.5-5)*(2.5-7.5)} = \frac{(x-5)*(x-7.5)}{-2.5*(-5)} = \frac{(x-5)*(x-7.5)}{12.5}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x1)*(x-x3)}{(x2-x1)*(x2-x3)} = \frac{(x-2.5)*(x-7.5)}{(5-2.5)*(5-7.5)} = \frac{(x-2.5)*(x-7.5)}{2.5*(-2.5)} = \frac{(x-2.5)*(x-7.5)}{-6.25}$$

$$L_3(x) = \frac{(x-x1)*(x-x2)}{(x3-x1)*(x3-x2)} = \frac{(x-2.5)*(x-5)}{(7.5-2.5)*(7.5-5)} = \frac{(x-2.5)*(x-5)}{5*2.5} = \frac{(x-2.5)*(x-5)}{12.5}$$

El polinomio queda entonces:

$$P(x) = \frac{(x-5)*(x-7.5)}{12.5} * 4.97 + \frac{(x-2.5)*(x-7.5)}{-6.25} * 2.47 + \frac{(x-2.5)*(x-5)}{12.5} * 1.22$$

El polinomio se puede dejar simplificado como está u operarlo para llegar a una expresión más reducida.

Evaluamos el polinomio en x=2min para calcular el valor de y en ese punto:

$$P(2) = \frac{(2-5)*(2-7.5)}{12.5} * 4.97 - \frac{(2-2.5)*(2-7.5)}{6.25} * 2.47 + \frac{(2-2.5)*(2-5)}{12.5} * 1.22 = 5.62 \text{ cm}$$

El resultado es coherente. La amplitud disminuye a medida que avanza el tiempo. La amplitud calculada es un poco mayor a la que se da para 0.5s más tarde (y=4.97).