DIFERENCIAS DIVIDIDAS de la FÓRMULA DE NEWTON

El polinomio interpolador de Lagrange es una función polinómica que hallamos a partir de unos valores soportes y sus imágenes. Se trata de una función aproximadora, y existen varias formas de obtenerla. Una de estas es la fórmula de Newton basada en diferencias divididas.

En este documento se explica cómo obtener las diferencias divididas y cómo diseñar un algoritmo para crear una matriz que las contenga.

CÓMO HALLAR LAS DIFERENCIAS DIVIDIDAS

Siendo f_i los valores que toman los puntos soportes x_i, las diferencias divididas se hallarán de esta forma:

- La diferencia dividida de orden 0 en el punto x_i es igual a su imagen.

$$f[x_i]=f(x_i)$$

- La diferencia dividida de orden 1 en los puntos $\{ x_i , x_{i+1} \}$ es igual a la resta de las diferencias divididas de los extremos del intervalo, partido de la resta de los extremos del intervalo. Es igual a la pendiente en esos puntos.

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

- La diferencia dividida de orden 2 en los puntos $\{ x_i , x_{i+1} , x_{i+2} \}$ es igual a la diferencia dividida de los dos últimos puntos del intervalo, menos la diferencia dividida de los dos primeros puntos del intervalo, todo esto dividido entre la resta de los extremos del intervalo.

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}$$

- Podemos generalizar para hallar la diferencia dividida de orden n de los puntos del intervalo: $\{x_{i,}\ x_{i+1, \dots ,}\ x_{i+n-1,}\ x_{i+n} \}$. Esta será igual a:

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+n-1}, x_{i+n}] = \frac{f[x_{i+1}, \dots, x_{i+n}] - f[x_i, \dots, x_{i+n-1}]}{x_{i+n} - x_i}$$

O, en palabras:

$$\frac{(\text{diferencia dividida de todos los puntos del intervalo salvo el primero}) - (\text{diferencia dividida de todos los puntos salvo el último})}{(\text{último punto}) - (\text{primer punto})}$$

TABLA DE DIFERENCIAS DIVIDIDAS

Dado que las diferencias divididas se construyen con las diferencias divididas “anteriores”, resulta muy útil agruparlas todas en una tabla.

La primera columna contiene los soportes, y las demás contienen las diferencias divididas desde el orden 0 hasta el máximo. El máximo coincide con el número de puntos de soporte.

Un ejemplo para 4 puntos soportes sería:

x_1	$f(x_1)$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_1, x_2, x_3]$	$f[x_1, x_2, x_3, x_4]$
x_2	$f(x_2)$	$f[x_2, x_3]$	$f[x_2, x_3, x_4]$	
x_3	$f(x_3)$	$f[x_3, x_4]$		
x_4	$f(x_4)$			

De esta forma, podemos ahorrarnos mucho trabajo, ya que para hallar, por ejemplo

$f[x_2, x_3, x_4] = \frac{f[x3,x4]-f[x2,x3]}{x4-x2}$, basta con que hagamos:

$$\frac{(\text{valor de la fila y columna anterior})-(\text{valor de la columna anterior y misma fila})}{(\text{extremo mayor del intervalo para el que calculamos la diferencia dividida})-(\text{extremo menor del intervalo})}$$

ALGORITMO DE MATRIZ CON DIFERENCIAS DIVIDIDAS

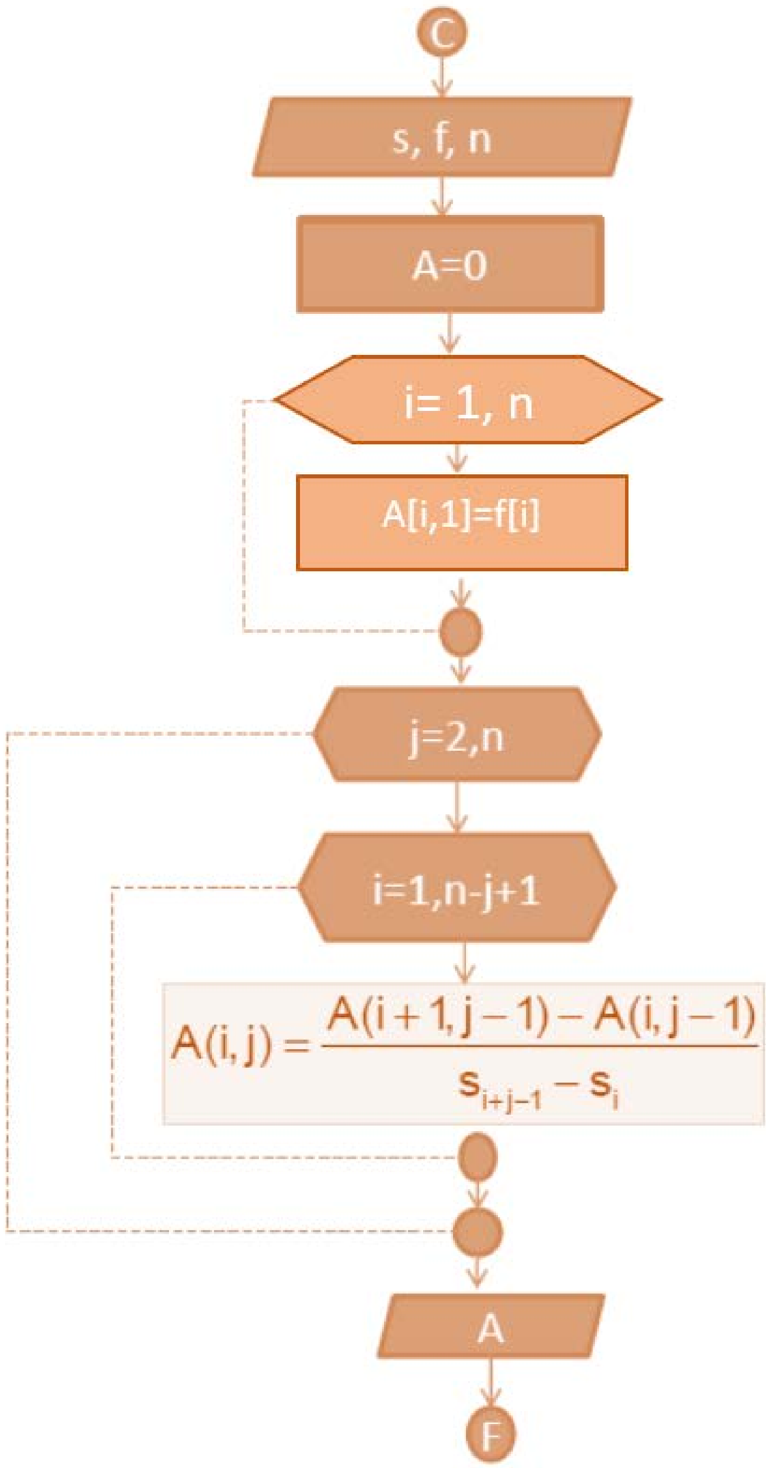
Podemos crear un algoritmo para representar la tabla de diferencias divididas. Esto lo haremos a través de una matriz **A** cuyas columnas sean las diferencias divididas de distintos órdenes (idéntica a la tabla pero omitiendo la columna de soportes).

- Para empezar, conocemos los valores de un vector **s** (contiene a los puntos soporte), un vector **f** (contiene las imágenes de los puntos soportes), y el número **n** (longitud de s y de f).
- Tras introducir estos valores, inicializamos la matriz llenándola de 0s.
- La primera columna de la matriz deberá contener los valores del vector f, ya que las diferencias divididas de orden 0 son iguales a las imágenes de los puntos. Por lo que en el algoritmo deberemos asignar mediante un bucle:
  A[i,1]= f[i]   (i=1, …, n)
- El resto de elementos de la matriz no-nulos se hallan con la fórmula que hemos descrito en el apartado de la tabla de diferencias divididas:
  $A[i,j]=\frac{A[i+1,\ j-1]-A[i,\ j-1]}{s[i+j-1]-s[i]}$
  Debemos tener en cuenta que primero rellenaremos las columnas, es decir, que el bucle que avance en las columnas debe ir antes del que avance en las filas. Esto se debe a que para calcular una diferencia dividida debemos utilizar las diferencias de la columna anterior.
- Por último, al rellenar las diferencias divididas, deberemos asegurarnos de no asignar valores a los elementos de la matriz que queremos mantener nulos (equivalen a las celdas vacías en la tabla). Para ello, debemos diferenciar entre los elementos nulos y las diferencias divididas. Existen varias formas de hacer esto. Una opción es basarnos en esta relación que observamos en la tabla del apartado anterior: la suma de la columna y fila menos uno de cada diferencia dividida siempre es menor o igual al número de soportes de dicha diferencia dividida.
  Por lo tanto, podemos crear una condición para la cual solo se calcule una diferencia dividida si i+j-1> n, siendo i el número de la fila y j el de la columna.
  Otro camino más simple en el que nos ahorramos la condición, es diseñar de esta forma el bucle que avanza por las filas: i=1, n-j+1.

Ambas formas son válidas y están basadas en el mismo principio, pero escogeremos la segunda en este ejemplo.

- Por último, habiendo cerrado todos los bucles tras sus respectivas operaciones, escribimos la matriz A

Atendiendo a todos estos detalles, el algoritmo nos quedaría así:



Por su parte, el pseudo-código sería:

Inicio

Leemos datos n, f, s

A=0

Para i desde 1 hasta n

A[i,1]= f[i]

Fin bucle en i

Para j desde 2 hasta n

Para i desde 1 hasta n-j+1

$A[i,j]=\frac{A[i+1,\ j-1]-A[i,\ j-1]}{s[i+j-1]-s[i]}$

Fin bucle en i

Fin bucle en j

Escribimos A

Final pseudo-código