EJERCICIO PROPUESTO:

Hacer un algoritmo para calcular:

- Las funciones de base
- La función interpoladora

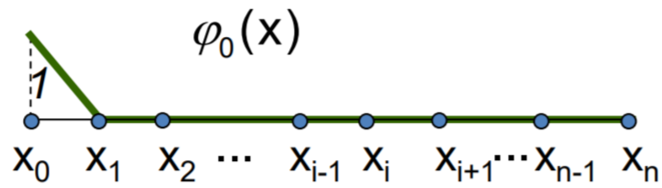
Resultado del algoritmo: un vector phi de n componentes que tengan. El valor de cada función de base en cierto punto t y una variable u que contenga el valor interpolado en ese punto t dado.

Datos:

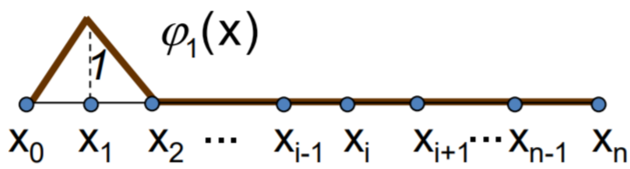
- Soporte de interpolación: x= {x1, x2, …, xn}
- Valores de la función: f= {f1, f2 ,…, fn }
- Punto de interpolación t.

Cuando empleamos funciones de base:

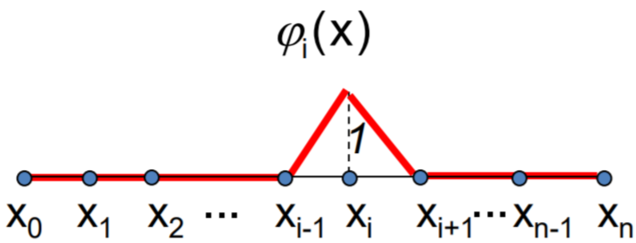
$$\varphi_0(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_1}{x_0 - x_1} & \text{si} \quad x \in [x_0, x_1] \\ 0 & \text{si} \quad x \in [x_1, x_n] \end{cases}$$



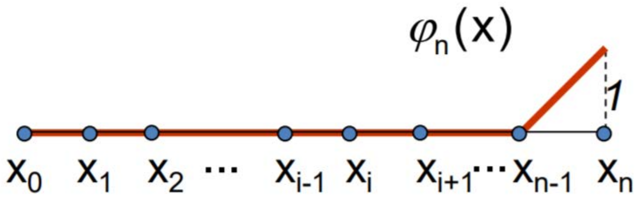
$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0} & \text{si} \quad x \in [x_0, x_1] \\ \dfrac{x - x_2}{x_1 - x_2} & \text{si} \quad x \in [x_1, x_2] \\ 0 & \text{si} \quad x \in [x_2, x_n] \end{cases}$$



$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & \text{si} \quad x \in [x_i, x_{i-1}] \\ \dfrac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} & \text{si} \quad x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0 & \text{si} \quad x \in [x_0, x_{i-1}] \cup [x_{i+1}, x_n] \end{cases}$$



$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} & \text{si} \quad x \in [x_{n-1}, x_n] \\ 0 & \text{si} \quad x \in [x_0, x_{n-1}] \end{cases}$$



En este recurso se dan por hecho los conocimientos básicos de las funciones de base. En caso de dudas, y si no se entiende bien, recomendamos este recurso del grupo M2 2020:

http://trabajo-cooperativo.net/wp-content/uploads/2020/11/Interpolaci%C3%B3n-de-Lagrange-M2.pdf

Tomamos un ejemplo en el que tenemos 3 subintervalos: {[0,2], [2,5], [5,6]}

X	0	2	5	6
F(x)	3	6	10,5	24

Para calcular las funciones de base, debemos tener en cuenta, que dichas funciones toman valor nulo en todos los puntos distintos del valor phi[i], y valen 1, cuando ambos valores son el mismo.

Calculamos para dichos valores, sus respectivos valores:

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{0-2} = \dfrac{1}{2}(2-x) & \text{si} \quad x \in [0,2] \\ 0 & \text{si} \quad x \in [2,6] \end{cases}$$

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{5-2} = \dfrac{x-2}{3} & \text{si} \quad x \in [2,5] \\ \dfrac{x-6}{5-6} = 6-x & \text{si} \quad x \in [5,6] \\ 0 & \text{si} \quad x \in [0,2] \end{cases}$$

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \dfrac{x-0}{2-0} = \dfrac{x}{2} & \text{si} \quad x \in [0,2] \\ \dfrac{x-5}{2-5} = \dfrac{1}{3}(5-x) & \text{si} \quad x \in [2,5] \\ 0 & \text{si} \quad x \in [5,6] \end{cases}$$

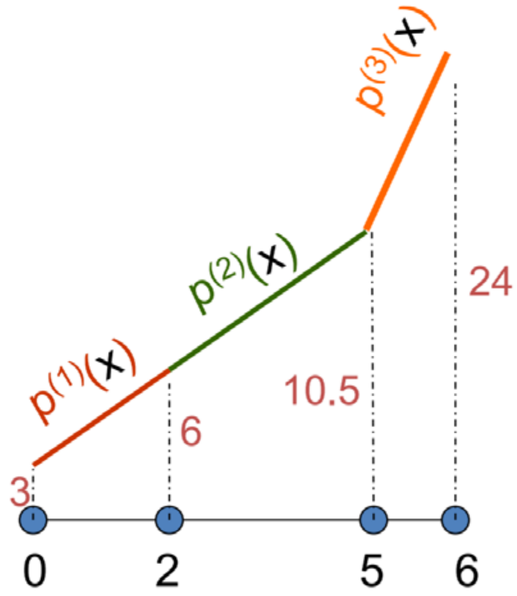
$$\varphi_3(x) = \begin{cases} \dfrac{x-5}{6-5} = x-5 & \text{si} \quad x \in [5,6] \\ 0 & \text{si} \quad x \in [0,5] \end{cases}$$

Una vez ya hemos calculado los valores de las funciones de base, ya podemos construir el polinomio que buscamos por trozos. Como hemos interpolado con solo dos valores para cada intervalo, aparecerán tantas rectas como intervalos tengamos. En nuestro caso 3 rectas distintas.

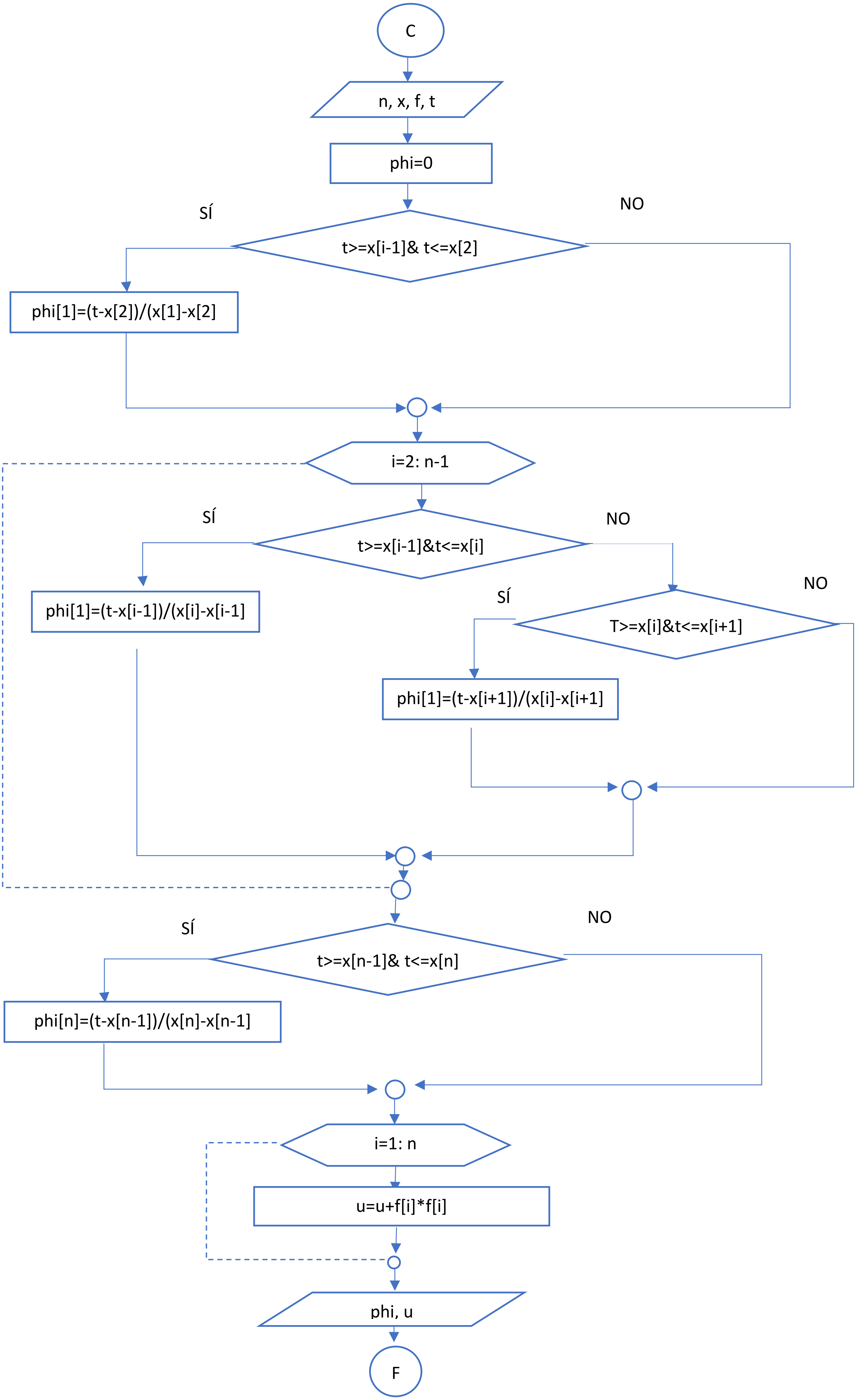
$$u(x) = \begin{cases} 3\varphi_0(x) + 6\varphi_1(x) = \dfrac{3}{2}(2-x) + 6\dfrac{x}{2} = 3 + 1.5x & \text{si} \quad x \in [0,2] \\ 6\varphi_1(x) + 10.5\varphi_2(x) = 6\dfrac{5-x}{3} + 10.5\dfrac{x-2}{3} = 3 + 1.5x & \text{si} \quad x \in [2,5] \\ 10.5\varphi_2(x) + 24\varphi_3(x) = 10.5(6-x) + 24(x-5) = -57 + 13.5x & \text{si} \quad x \in [5,6] \end{cases}$$

Si queremos representar la función que hemos obtenido, nos quedaría de esta manera:

$$u(x)=\begin{cases} 3+1.5x & \text{si} \quad x\in[0,2] \\ 3+1.5x & \text{si} \quad x\in[2,5] \\ -57+13.5x & \text{si} \quad x\in[5,6] \end{cases}$$



En la siguiente hoja, está desarrollado el algoritmo del ejercicio propuesto inicialmente para obtener las funciones de base y la función interpoladora a trozos.


C
n, x, f, t
phi=0
SÍ
NO
t>=x[i-1]& t<=x[2]
phi[1]=(t-x[2])/(x[1]-x[2]
i=2: n-1
SÍ
NO
t>=x[i-1]&t<=x[i]
phi[1]=(t-x[i-1])/(x[i]-x[i-1]
SÍ
NO
T>=x[i]&t<=x[i+1]
phi[1]=(t-x[i+1])/(x[i]-x[i+1]
SÍ
NO
t>=x[n-1]& t<=x[n]
phi[n]=(t-x[n-1])/(x[n]-x[n-1]
i=1: n
u=u+f[i]*f[i]
phi, u
F