PROBLEMAS INTERPOLACIÓN POLINÓMICA DE LAGRANGE

1.

Se conocen los valores que toma una f(x) en un conjunto de puntos dados por la siguiente tabla:

X = {-1, 0, 2, 3}

f(x) = {2, 4, 1, 0}

Obtener la tabla de diferencias divididas y el Polinomio interpolador de Lagrange por la fórmula de Newton. Evaluarlo en x=1.

Lo sabemos porque tenemos un soporte de 4 puntos.
Si tuviésemos 5, el polinomio tendría que ser de grado menor o igual que 4.

SOLUCIÓN

Sabemos que P(x) tiene que ser de grado menor o igual a tres.

Por tanto tendrá la forma:

$P(x) = f[x_1] + f[x_1, x_2]\,(x - x_1) + f[x_1, x_2, x_3]\,(x - x_1)\,(x - x_2) + f[x_1, x_2, x_3, x_4]\,(x - x_1)\,(x - x_2)\,(x - x_3)$

La tabla de diferencias divididas posee la siguiente estructura:

X_1	$f(x_1)$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_1, x_2, x_3]$	$f[x_1, x_2, x_3, x_4]$
X_2	$f(x_2)$	$f[x_2, x_3]$	$f[x_2, x_3, x_4]$	
X_3	$f(x_3)$	$f[x_3, x_4]$		
X_4	$f(x_4)$			

Para realizar el polinomio nos sirven los elementos de la primera fila.

De acuerdo con la fórmula general de la matriz de diferencias divididas:

$$A(i,j)=\frac{A(i+1,j-1)-A(i,j-1)}{X(i+j-1)-x(i)} \quad (j=2,\dots,n)(i=1,\dots,n-j+1)$$

Calculamos los diferentes elementos de la tabla:

$A(1,3) = f[x_1, x_2] = \frac{f(x2)-f(x1)}{X2-X1} = \frac{4-2}{0-(-1)} = 2$

$A(2,3) = f[x_2, x_3] = \frac{f(x3)-f(x2)}{X3-X2} = \frac{1-4}{2-0} = -3/2$

$A(3,3) = f[x_3,x_4] = \frac{f(x4)-f(x3)}{X4-X3} = \frac{0-1}{3-2} = -1$

$A(1,4) = f[x_1,x_2,x_3] = \frac{f[x2,x3]-f[x1,x2]}{X3-X1} = \frac{-3/2-2}{2+1} = -7/6$

$A(2,4) = f[x_2,x_3,x_4] = \frac{f[x3,x4]-f[x2,x3]}{X4-X2} = \frac{-1-(-\frac{3}{2})}{3+0} = 1/6$

$A(1,5) = f[x_1,x_2,x_3,x_4] = \frac{f[x2,x3,x4]-f[x1,x2,x3]}{X4-X1} = \frac{\frac{1}{6}-(-\frac{7}{6})}{3-(-1)} = 1/3$

Ya tenemos construida la tabla:

-1	2	2	-7/6	1/3
0	4	-3/2	1/6	
2	1	-1		
3	0			

CONSEJO: Recomendamos ir construyendo la tabla a medida que se van realizando los cálculos, de esta manera los datos son más accesibles y no os perderéis con la fórmula.

Como habréis podido comprobar siempre se sigue el mismo patrón, y se va construyendo de izquierda a derecha.

Con los elementos de la primera fila nuestro polinomio interpolador será:

$P(x) = 2 + 2\ (x + 1) - 7/6\ (x + 1)\ x + 1/3\ (x + 1)\ x\ \ (x - 2)$

Es efectivamente un polinomio de grado 3.

Lo evaluamos para x=1

$P(1) = 2 + 2\ (1 + 1) - 7/6\ (1 + 1)\ 1 + 1/3\ (1 + 1)\ 1\ (1 - 2) = 3$

Para evaluar el polinomio en un punto vale con sustituir la x por dicho punto.

*Nos interesa utilizar la fórmula de Newton para interpolación porque tan solo el último miembro del polinomio tiene grado máximo, a diferencia de los polinomios de base de Lagrange.