DIFERENCIAS DIVIDIDAS

GRUPO T5

Algoritmia | Trabajo en Equipo | Fundamentos de Programación | 1º Biotecnología 2020-2021

¿NO TE HAS ENTERADO EN CLASE?

No te preocupes, tanto si no has podido seguir o no has conseguido coger el hilo de la clase y has dejado de prestar atención. Este documento tiene como fin remediarlo.

¿Qué son las diferencias divididas?

El método de las diferencias divididas sirve para calcular los coeficientes del polinomio interpolante en la fórmula de Newton:

$$P_k(x) = \sum_{i=0}^{k} f[x_0 \dots x_i] \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)$$

¿Difícil de asimilar a simple vista? Déjame desmigarlo poco a poco.

Dada una serie de valores de una función se denomina diferencia dividida de orden cero $f[x_1] = f(x_1)$ y y la de orden uno se expresa como:

$$f[x_1, x_2] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Podemos ver que las diferencias divididas de los distintos órdenes se calculan a partir de las ya calculadas anteriormente. De esta manera, comprobaremos que las diferencias divididas de orden superior se pueden obtener de forma recurrente:

$$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1}$$

$$f[x_i, \dots, x_k] = \frac{f[x_{i+1}, \dots, x_k] - f[x_i, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_i}$$

De esta fórmula surge la tabla de diferencias divididas:

Consiste en escribir los puntos x e y en las dos primer columnas; luego, se realizan las **diferencias** de la columna de **diferencias** anterior y los valores de x correspondientes. Dada la forma que tiene la tabla, se denomina método piramidal. Se puede ver fácilmente qué cálculo hacer para obtener el siguiente elemento.

x	f(x)	Orden 1	Orden 2	Orden 3	Orden 4
x_1	$f(x_1)$	$f[x_1,x_2] = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$	$f[x_1,x_2,x_3] = \frac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}$	$f[x_1,x_2,x_3,x_4] = \frac{f[x_2,x_3,x_4]-f[x_1,x_2,x_3]}{x_4-x_1}$	$f[x_1,x_2,x_3,x_4,x_5] = \frac{f[x_2,x_3,x_4,x_5]-f[x_1,x_2,x_3,x_4]}{x_5-x_1}$
x_2	$f(x_2)$	$f[x_2,x_3] = \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$	$f[x_2,x_3,x_4] = \frac{f[x_3,x_4]-f[x_2,x_3]]}{x_4-x_2}$	$f[x_2,x_3,x_4,x_5] = \frac{f[x_3,x_4,x_5]-f[x_2,x_3,x_4]}{x_5-x_2}$	
x_3	$f(x_3)$	$f[x_3,x_4] = \frac{f(x_4)-f(x_3)}{x_4-x_3}$	$f[x_3,x_4,x_5] = \frac{f[x_4,x_5]-f[x_3,x_4]]}{x_5-x_3}$		
x_4	$f(x_4)$	$f[x_4,x_5] = \frac{f(x_5)-f(x_4)}{x_5-x_4}$			
x_5	$f(x_5)$				

Ahora bien, ¿cuál sería el equivalente de esta tabla para formar una matriz?

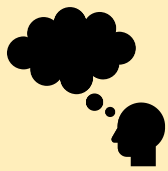
		j=1	j=2	j=3	j=4	j=5
i=1	x_1	$f(x_1)$	$f[x_1,x_2] = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$	$f[x_1,x_2,x_3] = \frac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}$	$f[x_1,x_2,x_3,x_4] = \frac{f[x_2,x_3,x_4]-f[x_1,x_2,x_3]}{x_4-x_1}$	$f[x_1,x_2,x_3,x_4,x_5] = \frac{f[x_2,x_3,x_4,x_5]-f[x_1,x_2,x_3,x_4]}{x_5-x_1}$
i=2	x_2	$f(x_2)$	$f[x_2,x_3] = \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$	$f[x_2,x_3,x_4] = \frac{f[x_3,x_4]-f[x_2,x_3]]}{x_4-x_2}$	$f[x_2,x_3,x_4,x_5] = \frac{f[x_3,x_4,x_5]-f[x_2,x_3,x_4]}{x_5-x_2}$	
i=3	x_3	$f(x_3)$	$f[x_3,x_4] = \frac{f(x_4)-f(x_3)}{x_4-x_3}$	$f[x_3,x_4,x_5] = \frac{f[x_4,x_5]-f[x_3,x_4]]}{x_5-x_3}$		
i=4	x_4	$f(x_4)$	$f[x_4,x_5] = \frac{f(x_5)-f(x_4)}{x_5-x_4}$			
i=5	x_5	$f(x_5)$				

Como se puede observar, se obtendría una matriz, A[i,j], en este caso de cinco filas y cinco columnas. Generalizando tendríamos una matriz con el mismo número de filas y columnas, n.

➔ Te podrías preguntar porque no tenemos en cuenta los valores x dentro de la matriz. La razón por la que no se incluye x es porque ésta no constituye una diferencia dividida en sí, sino que sirve para calcularlas.

La expresión matricial o fórmula que resume la tabla anterior es la siguiente:

$$\boldsymbol{A}_{[i,j]} = \frac{\boldsymbol{A}_{[i+1,j]} - \boldsymbol{A}_{[i,j-1]}}{\boldsymbol{x}_{(i+j-1)} - \boldsymbol{x}_{(i)}}$$



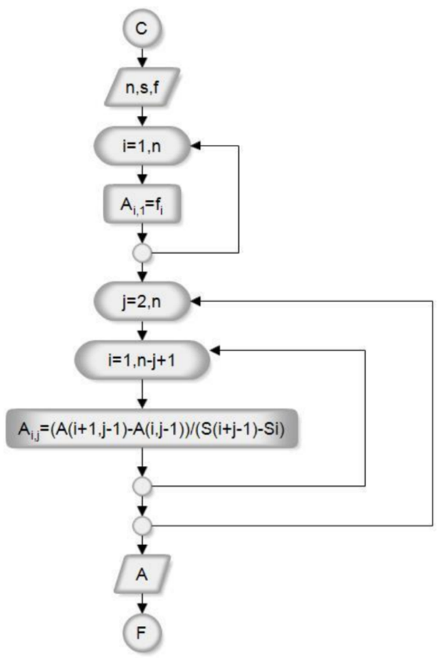
Lo complicado que tiene la fórmula es comprender de dónde surgen los **subíndices**. Como ya hemos explicado anteriormente, cada diferencia dividida se calcula a partir de las ya existentes. Por lo tanto, el **numerador** es la resta entre los elementos de la columna anterior (como se puede apreciar en la tabla) (de allí el j-1). Por otra parte, el **denominador** es el resultado de la resta entre los valores x.

Al observar la tabla, se nota que el elemento después del signo menos siempre lleva el subíndice de la fila en la que estamos, de allí s(i). Por otra parte, aunque difícil de verlo a simple vista, el elemento de delante del signo menos lleva el subíndice correspondiente a la suma entre la fila y la columna en la que nos hallamos, restándole 1. ¿Por qué la i va hasta n-j+1? Tomemos el ejemplo de la tabla. El número de elementos n es igual a 5. A medida que vamos avanzando en las columnas, este número va disminuyendo en una unidad. De manera que en la columna 2, nos quedamos no n-1=4 filas. En la columna 3 nos quedamos nos n-2=3 filas y así sucesivamente. ¿Puedes darte cuenta que el número que hay detrás del menos es j-1? De manera que si hacemos n-(j-1) esto resulta en ser n-j+1.

Fuente de la explicación: *http://trabajo-cooperativo.net/wp-content/uploads/2019/12/Diferencias-divididas.pdf*

¿No te ha quedado suficientemente claro?

¿No te ha quedado suficientemente claro? Aquí te dejo las capturas del Equipo T1 (2019) sobre ejemplos de un organigrama y unos links donde puedes reforzar tu conocimiento acerca de las diferencias divididas.



La duda más frecuente en este apartado sería el porqué puede haber dos bucles i, que sean distintos. Esto es porque al cerrar un bucle, da igual volver a usar el nombre de la variable, no afectaría al programa. Pero tiene que estar cerrado.

Fórmula de Newton para la interpolación de Lagrange

_Al hablar de la fórmula de Newton, se puede decir que se trata de una expresión polinómica que de manera general se puede expresar como:

p(x)=f[s1]+f[s1,s2](x-s1)+f[s1,s2,s3](x-s1)(x-s2)+…….f[s1,s2,s3…..si](x-s1)(x-s2)….(x-s(i-1))+f[s1,s2,s3,…..sn](x-s1)(x-s2)…(x-s(n-1)).

Una posible duda aquí sería: ¿Por qué se pone un término intermedio i? Este es para identificar una expresión general de lo que estamos haciendo. El valor n indica que se trata del último sumando.

Ahora vamos a dar una expresión más general de la fórmula:

p(x)=$\sum_{i=1}^{n}(A(1,i) * \prod_{j=1}^{i-1}(x - sj))$ Donde A(1,i) es la primera fila de la matriz calculada anteriormente.

Fuente: *http://trabajo-cooperativo.net/wp-content/uploads/2019/12/Diferencias-divididas.pdf*

➔ http://interpolacion.wikidot.com/new-ejercicios

➔ https://jhonnynina.files.wordpress.com/2009/05/interpolacion_pj.pdf