EJERCICIO INTERPOLACIÓN DE LAGRANGE EXAMEN PARCIAL 20/11/20

En una planta de producción de propanol se ha obtenido la siguiente producción total en función del tiempo:

t (horas)	3	5	15	25	35	50
f (litros)	8	12	30	35	40	100

A) Se desea obtener la cantidad producida transcurridas: (a) 4 horas y (b) 40 horas. Para ello, se realizará una interpolación polinómica de Lagrange formada por un polinomio de grado 3 en el intervalo [3, 25] y otro de grado 2 en el intervalo [25,50].

a) Para obtener el polinomio interpolador de grado 3 emplearemos la **fórmula de Newton**:

- En primer lugar, se comienza construyendo la tabla de diferencias divididas*:

3	8	2	-0,016667	-0,0021969
5	12	1.8	-0,065	
15	30	0.5		
25	35			

*Si existiesen dudas a la hora de realizar la tabla de diferencias divididas, se recomienda consultar los siguientes apuntes (http://trabajo-cooperativo.net/wp-content/uploads/2020/11/apuntes-diferencias-divididas.pdf).

- Se aplica la fórmula de Newton:

P(t)= 8 + 2(t-3) – 0.016667(t-3)(t-5) – 0.0021969(t-3)(t-5)(t-15)

- Particularizando para t=4:

P(4)= 9,9925 litros

Otro método para abordar este ejercicio podría ser empleando los **polinomios de base de Lagrange**, basándose en la siguiente fórmula: $P(x) = f(3)\cdot L_3+f(5)\cdot L_5+f(15)\cdot L_{15}+f(25)\cdot L_{25}$

$L_3(x)=\frac{(x-5)(x-15)(x-25)}{(3-5)(3-15)(3-25)}$; $L_5(x)=\frac{(x-3)(x-15)(x-25)}{(5-3)(5-15)(5-25)}$; $L_{15}(x)=\frac{(x-3)(x-5)(x-25)}{(15-3)(15-5)(15-25)}$; $L_{25}(x)=\frac{(x-3)(x-5)(x-15)}{(25-3)(25-5)(25-15)}$

$P(x)= f(3)\cdot L_3 + f(5)\cdot L_5 + f(15)\cdot L_{15} + f(25)\cdot L_{25}= 8\cdot\frac{(x-5)(x-15)(x-25)}{-528} + 12\cdot\frac{(x-3)(x-15)(x-25)}{400} + 30\cdot\frac{(x-3)(x-5)(x-25)}{-1200} + 35\cdot\frac{(x-3)(x-5)(x-15)}{4400} = -\frac{x3-45x2+575x-1875}{66} + \frac{3x3-129x2+1485x-3375}{100} - \frac{x3-33x2+215x-375}{40} + \frac{7x3-161x2+945x-1575}{880} = \frac{-29x3+447x2+24245x+29625}{13200}$

Particularizando para el punto pedido (4 horas):

P(4) = 9,9925 litros

Como se ve, el primer método es mucho más rápido y cómodo que el segundo, pero empleando ambos comprobamos que los resultados coinciden y, por tanto, que los dos procedimientos funcionan.

b) Para obtener el polinomio interpolador de grado 2, de nuevo, empleamos la **fórmula de Newton**:

- Tabla de diferencias divididas:

25	35	0,5	0,14
35	40	4	
50	100		

- Fórmula de Newton:

$P(t)= 35 + 0{,}5(t-25) + 0{,}14(t-25)(t-35)$

- Particularizando en t=40:

$P(40)= 53$ litros

Comprobamos que el resultado es el mismo aplicando la **definición de polinomio interpolador**:

Como tenemos 3 puntos de soporte, la función interpoladora será de grado menor o igual que 2, de la siguiente manera: $P(x)= C_1 + C_2x + C_3x^2$

$P(x) = F(x)$; por tanto:

$$\left.\begin{array}{l} P(5)= f(25) \\ P(7)= f(35) \\ P(10)= f(50) \end{array}\right\} \text{; siendo 25, 35 y 50 los puntos de soporte}$$

El sistema de ecuaciones a partir del cual se podrán conocer los coeficientes que acompañan a la incógnita x (C_1, C_2, C_3) en el polinomio interpolador que buscamos obtener es:

$$\left.\begin{array}{l} C_1 + C_2\cdot 25 + C_3\cdot 25^2 = 35 \\ C_1 + C_2\cdot 35 + C_3\cdot 35^2 = 40 \\ C_1 + C_2\cdot 50 + C_3\cdot 50^2 = 100 \end{array}\right\}$$

Se particulariza la variable x, sustituyéndose por los valores sobre los que se sitúan los puntos de soporte.

Los polinomios se igualan a los valores conocidos que toma la función temperatura en los puntos de soporte.

Mediante el método que se prefiera se resuelve el sistema anterior, obteniéndose:

$C_1 = 145$

$C_2 = -7{,}9$

$C_3 = 0{,}14$

De esta manera ya hemos conseguido conocer la función interpoladora: $\boxed{P(x) = 145 -7{,}9x +0{,}14x^2}$

Si ahora se particulariza para x= 40:

$P(40)= 53$ litros

B) Obtener, para la función del apartado A) la función de base asociada al 2º punto del soporte (5 horas) y representarla gráficamente.

P(x)= $\frac{(x-3)(x-15)(x-25)}{(5-3)(5-15)(5-25)} = \frac{(x-3)(x-15)(x-25)}{400}$

Sustituyendo los valores de soporte:

P(3)= $\frac{(3-3)(3-15)(3-25)}{400} = 0$

P(5)= $\frac{(5-3)(5-15)(5-25)}{400} = 1$

P(15)= $\frac{(15-3)(15-15)(15-25)}{400} = 0$

P(25)= $\frac{(25-3)(25-15)(25-25)}{400} = 0$

La representación gráfica será: