Ejercicio propuesto de mínimos cuadrados

Se desea ajustar la función $\boxed{y(t) = a + \frac{b}{t+1}}$

a n puntos de coordenadas (t_i,y_i), i = 1,…,n; utilizando el criterio de mínimos cuadrados. Se pide:

A) Deducir la **EXPRESIÓN MATRICIAL** del **sistema de ecuaciones** cuya solución conduce a la obtención de los parámetros a y b de la función $\boxed{y(t) = a + \frac{b}{t+1}}$

B) Realizar un **algoritmo** para obtener la **matriz A de coeficientes** del sistema obtenido en el apartado a) y un **vector V que contenga los términos independientes**. (2 x 2) La matriz A tiene 2 filas y 2 columnas; el vector V tiene 2 filas y 1 columna.

A) Se debe minimizar la distancia entre los puntos y la función a obtener. Esa distancia la expresaremos como f (a,b), y será la función a minimizar, de la que obtendremos los valores **a** y **b**.

$$d_i = y_i - (a + \frac{b}{t+1}) \longrightarrow d_i^2 = (y_i - (a + \frac{b}{t+1}))^2 \longrightarrow f(a,b) = \sum_{i=1}^{n} \left(yi - \left(a + \frac{b}{t+1}\right)\right)^2$$

Ahora, para minimizar la función, derivamos con respecto a las variables a y b:

$$\frac{\partial f}{\partial a} = 2\sum_{i=1}^{n}\left(yi - \left(a + \frac{b}{ti+1}\right)(-1)\right) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial b} = 2\sum_{i=1}^{n}\left(yi - \left(a + \frac{b}{ti+1}\right)(-\frac{1}{t+1})\right) = 0$$

De aquí obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones,

$$\left.\begin{array}{l} -\sum_{i=1}^{n} y_i + \sum_{i=1}^{n} a + \sum_{i=1}^{n} \frac{b}{t_i+1} = 0 \\ -\sum_{i=1}^{n} y_i \frac{1}{t_i+1} + \sum_{i=1}^{n} \frac{a}{t_i+1} + \sum_{i=1}^{n} \frac{b}{(t_i+1)^2} = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} an + b\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{t_i+1} = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{t_i+1} + b\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(t_i+1)^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{(t_i+1)} \end{array}\right\}$$

cuya expresión matricial es

$$\boxed{\begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{t_i+1} \\ \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{t_i+1} & \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(t_i+1)^2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{(t_i+1)} \end{pmatrix}}$$

A X V

B) A la hora de realizar el algoritmo, debemos pensar en cómo representar un elemento genérico de la matriz A y del vector V.

· **En el caso de la matriz A**, observamos que cada elemento es el sumatorio desde i=1 hasta n de la expresión $\frac{1}{(t_i+1)^{(j+k-2)}}$, (siendo k la fila y j la columna), puesto que, si observamos el patrón, el exponente de la suma del denominador es igual a la suma de filas y columnas menos dos unidades.

· **En cuanto al vector V**, su término general es el sumatorio desde i=1 hasta n de la expresión $\frac{y_i}{(t_i+1)^{(k-1)}}$, (siendo k la fila).

El algoritmo final será el siguiente: