ALGORITMOS PARA EL CÁLCULO CIENTÍFICO II

Se denomina interpolación, en el subcampo matemático del análisis numérico, a la obtención de nuevos puntos partiendo del conocimiento de un conjunto discreto de puntos.
Es decir, interpolar consiste en encontrar una función *p(x)*, tal que en *(n+1)* puntos: $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, ella y/o alguna de sus derivadas tomen valores dados. Dicha función se denomina FUNCIÓN INTERPOLADORA sobre el SOPORTE $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$.

INTERPOLACIÓN DE LAGRANGE: Fórmula de Newton basada en las diferencias divididas.

Si bien, una vez calculados los polinomios de base de Lagrange obtenemos el polinomio interpolador, debemos darnos cuenta de que para construir polinomios de grado elevado hay que dedicar un gran esfuerzo. Además, este método presenta el inconveniente de que si se añade otro punto al soporte, el nuevo polinomio interpolador no se puede calcular a partir del anterior. En consecuencia, habría que repetir todo el proceso.

Por ello, en estos casos se suele utilizar la **fórmula de Newton**, que nos permite ir calculando progresivamente polinomios de interpolación de grado creciente.

¿Cuándo nos interesa emplear polinomios de base?

Tenemos que recordar que los polinomios de base, $L_i(x)$, dependen SOLAMENTE de los puntos de soporte. Es decir, NO DEPENDEN de los valores de la función interpoladora.

Luego, este método es particularmente útil cuando queremos interpolar más de una función sobre el mismo soporte.

$$L_i(\boldsymbol{x}) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{\mathrm{x} - x_j}{x_i - x_j}$$

i = 1, …, n

DIFERENCIAS DIVIDIDAS:

Las diferencias divididas de una función *f(x)* se definen como:

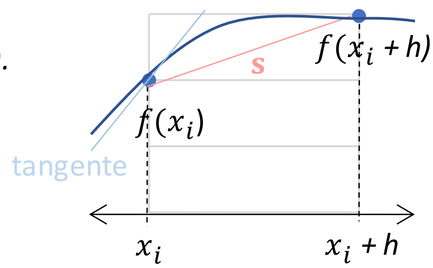
La diferencia dividida de **orden cero**: $f[x_i] = f(x_i)$: *valor de la función*

Diferencia dividida

La diferencia dividida de **orden uno**: $f[x_i, x_{i+1}] = \dfrac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$: pendiente de una recta **s**.

Está relacionada con la primera derivada de la *f(x)*.

$$f'(x) = \frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{h}$$



La diferencia dividida de **orden dos**:

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i} = \frac{\dfrac{f(x_{i+2}) - f(x_{i+1})}{x_{i+2} - x_{i+1}} - \dfrac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}}{x_{i+2} - x_i} =$$

$$\frac{f(x_{i+2}) - f(x_{i+1})}{(x_{i+2} - x_{i+1})(x_{i+2} - x_i)} - \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{(x_{i+1} - x_i)(x_{i+2} - x_i)}$$

La diferencia dividida de **orden n**:

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+n-1}, x_{i+n}] = \frac{f[x_{i+1}, \dots, x_{i+n}] - f[x_i, \dots, x_{i+n-1}]}{x_{i+n} - x_i}$$

TABLA PARA CONSTRUIR DIFERENCIAS DIVIDIDAS

Matriz A

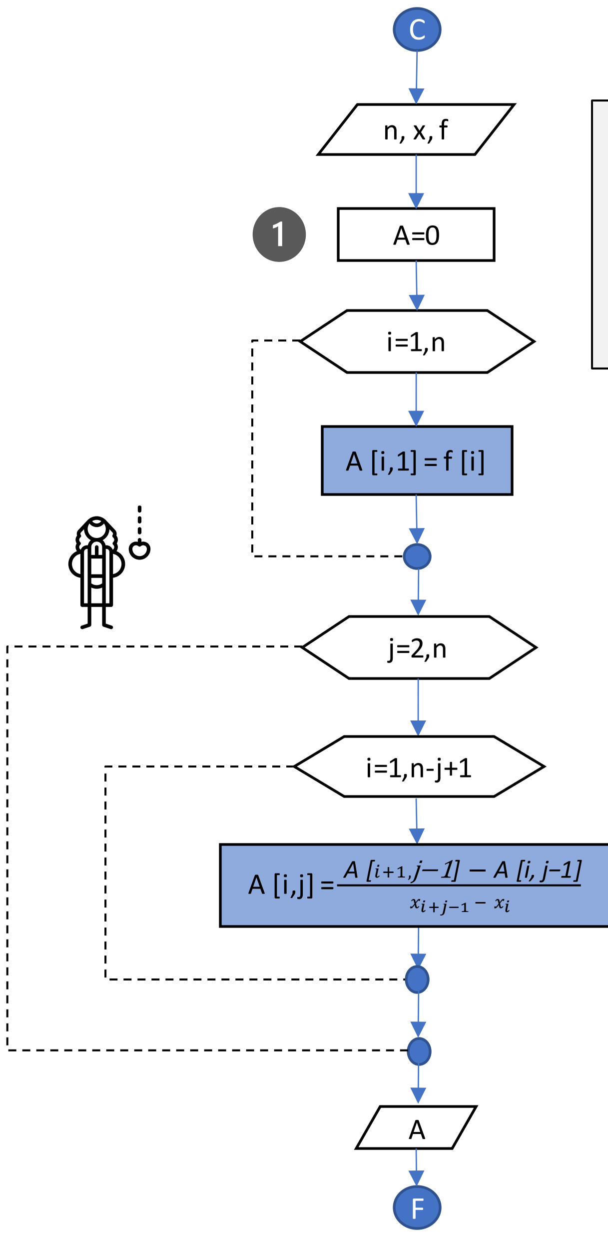
$i = 1$	x_1	$f[x_1]$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_1, x_2, x_3]$	$f[x_1, x_2, x_3, x_4]$	$f[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]$
$i = 2$	x_2	$f[x_2]$	$f[x_2, x_3]$	$f[x_2, x_3, x_4]$	$f[x_2, x_3, x_4, x_5]$	0
$i = 3$	x_3	$f[x_3]$	$f[x_3, x_4]$	$f[x_3, x_4, x_5]$	0	0
$i = 4$	x_4	$f[x_4]$	$f[x_4, x_5]$	0	0	0
$i = 5$	x_5	$f[x_5]$	0	0	0	0
		$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 5$

A partir de la tabla se obtienen las siguientes fórmulas con las que realizaremos el organigrama:

$$A\,[i,1] = f\,[i] \qquad (i=1, \ldots, n)$$

$$A\,[i,j] = \frac{A\,[i+1, j-1] - A\,[i, j-1]}{x_{i+j-1} - x_i} \qquad (j=2, \ldots, n);\ (i=1, \ldots, n-(j-1))$$

$$A\,[i,j] = 0 \qquad (j=1, \ldots, n;\ i>n-(j-1)) \quad 1$$



1. Con el fin de evitar un tercer bucle, que además sería más complicado que los anteriores, se introduce desde un principio una matriz de ceros, cuyos valores van ir siendo sustituidos a lo largo del organigrama.

M2/2020

FÓRMULA DE NEWTON BASADA EN LA MATRIZ (Tabla de diferencias divididas):

Según se van añadiendo puntos de soporte, se construye el polinomio interpolador de grado n:

Soporte: $\{x_0\} \Longrightarrow$ $\boldsymbol{R_0(x)} = a_0$

Soporte: $\{x_0, x_1\} \Longrightarrow$ $\boldsymbol{R_1(x)} = R_0(x) + a_1(x - x_0) = a_0 + a_1(x - x_0)$

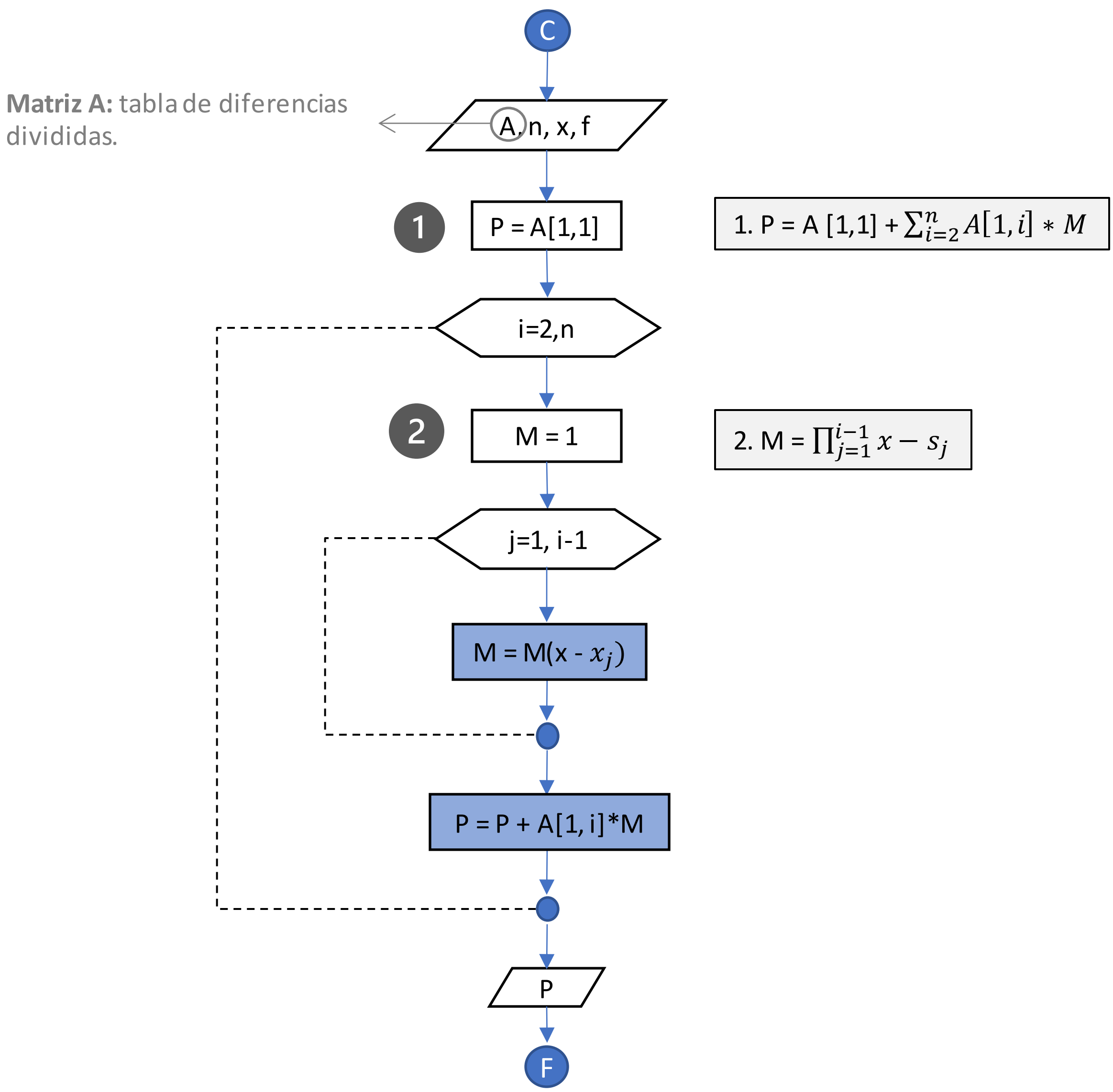
Soporte: $\{x_0, x_1, x_2\} \Longrightarrow$ $\boldsymbol{R_2(x)} = R_1(x) + a_2(x - x_0)(x - x_1) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$

...

Soporte: $\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\} \Longrightarrow$ $\boldsymbol{R_n(x)} = a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)$

De esto se deduce que la **fórmula de Newton** para obtener el polinomio interpolador de Lagrange es:

$$\boldsymbol{R(x)} = \sum_{i=1}^{n}(f[x_0, x_1, \ldots, x_n]\prod_{j=1}^{i-1} x - x_j) = \boxed{f[x_0] + \sum_{i=1}^{n}(f[x_1, x_2, \ldots, x_n]\prod_{j=1}^{i-1} x - x_j)}$$



Ejercicio propuesto:
Obtened el polinomio de interpolación usando la fórmula de interpolación de Newton basada en las diferencias divididas, con los datos que aparece a continuación, e interpolar en el punto **x = -1.**

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}: \{\mathbf{2}, \mathbf{0}, \mathbf{-2}\} \\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}): \{\mathbf{15}, \mathbf{-1}, \mathbf{-17}\} \end{cases}$$

Comenzamos planteando la tabla de diferencias divididas:

Matriz A

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
2	15	$\frac{-1-15}{0-2} = 8$	$\frac{8-8}{-2-2} = 0$
0	-1	$\frac{-17-(-1)}{-2-0} = 8$	...
-2	-17	...	...

A continuación, determinamos el polinomio interpolador:

$$R(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$

Sustituyendo los valores

$$R(x) = 15 + 8(x - 2) + 0(x - 2)(x - 0)$$

Para interpolar en el punto x = -1, únicamente tenemos que sustituir la x por -1:

$$R(-1) = 15 + 8(-1 - 2) + 0(-1 - 2)(-1 - 0) = 15 - 24 = -9$$

M2/2020