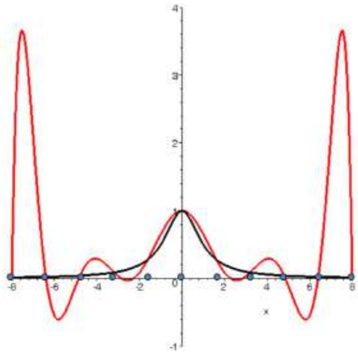
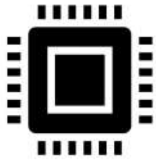
Interpolación de Lagrange por Tramos

En problemas de interpolación de Lagrange en los que se utilizan polinomios de grado elevado, son frecuentes las oscilaciones, que dan lugar a resultados imprecisos. En estos casos, es conveniente utilizar la interpolación lineal por tramos o splines.





Este tipo de interpolación permite obtener resultados similares, pero usando únicamente polinomios de bajo grado y tomando conjuntos de 2 o 3 puntos.

Por lo general, consideramos como grado alto, 3 o mayor.

Una vez vista la utilidad de este tipo de interpolación, podemos pasar a ver cómo podemos emplearla en casos prácticos. En este caso, nos centraremos en interpolación por tramos (splines) de primer grado.

El ejemplo que vamos a emplear para la explicación es el mismo que utilizó el profesor. La cuestión con la que nos podríamos encontrar podría ser de la siguiente forma:

> Determinar la función continua polinómica de 1er Grado a tramos que interpola a una determinada función f(x) de la que se conocen los siguientes datos:

x	0	2	5	6
f(x)	3	6	10.5	24

Vamos a resolver el problema de dos formas distintas: mediante sistemas de ecuaciones y mediante funciones de base de Lagrange.

Antes de comenzar, existen una serie de pasos iniciales comunes a todos los métodos de interpolación por tramos:

Tenemos que dividir el soporte suministrado en subintervalos a los que aplicaremos la interpolación.

Para conocer el número de puntos soporte necesarios para cada polinomio de primer grado, recurrimos a la siguiente regla:

$$\text{Grado polinomio interpolador} \leq \text{N° puntos soporte} - 1$$

$$1 \leq \underbrace{\text{N° puntos soporte}}_{=\,2} - 1$$

En este caso, resulta fácil ver, que necesitaremos dos puntos por cada polinomio, por lo que dividiremos el soporte en 3 sub-soportes de dos puntos.

{[0,2],[2,5],[5,6]}

SISTEMAS DE ECUACIONES (aplicación de la definición)

Establecemos un polinomio genérico de primer grado para cada intervalo determinado (i).

$$p^{(i)}(x) = a_i + b_i x$$

Establecemos dos ecuaciones análogas, que forman un sistema, la primera para el extremo inferior del intervalo y la segunda para el extremo superior.

$$\begin{cases} a_i + b_i x_i = f_i \\ a_i + b_i x_{i+1} = f_{i+1} \end{cases}$$

Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} a_i + b_i x_i = f_i \\ a_i + b_i x_{i+1} = f_{i+1} \end{cases} \qquad a_i = \underbrace{f_i - b_i x_i}$$

Resolviendo por sustitución como se indica, resulta muy sencillo obtener:

$$b_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i}$$

$$a_i = f_i - b_i x_i$$

A continuación, sustituimos los datos conocidos en las expresiones anteriores, para obtener los valores de a y b para cada subintervalo y, en definitiva sus respectivos polinomios interpoladores de primer grado.

Primer intervalo [0,2]

$$b_1 = \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} = \frac{6-3}{2-0} = \frac{3}{2}$$

$$a_1 = f_1 - b_1 x_1 = 3 - \frac{3}{2}0 = 3$$

$$p^{(1)}(x) = a_1 + b_1 x \Rightarrow p^{(1)}(x) = 3 + \frac{3}{2}x$$

Segundo intervalo [2,5]

$$b_2 = \frac{f_3 - f_2}{x_3 - x_2} = \frac{10.5 - 6}{5-2} = \frac{4.5}{3} = \frac{3}{2}$$

$$a_2 = f_2 - b_2 x_2 = 6 - \frac{3}{2}2 = 3$$

$$p^{(2)}(x) = a_2 + b_2 x \Rightarrow p^{(2)}(x) = 3 + \frac{3}{2}x$$

Tercer intervalo [5,6]

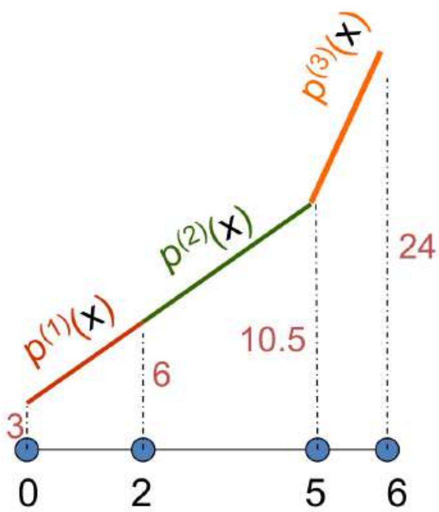
$$b_2 = \frac{f_3 - f_2}{x_3 - x_2} = \frac{10.5 - 6}{5 - 2} = \frac{4.5}{3} = \frac{3}{2}$$

$$a_2 = f_2 - b_2 x_2 = 6 - \frac{3}{2}2 = 3$$

$$p^{(2)}(x) = a_2 + b_2 x \Rightarrow p^{(2)}(x) = 3 + \frac{3}{2}x$$

Juntando, los tres intervalos, obtenemos la función polinómica interpoladora por tramos:

$$u(x) = \begin{cases} 3 + \frac{3}{2}x & \text{si} \quad x \in [0,2] \\ 3 + \frac{3}{2}x & \text{si} \quad x \in [2,5] \\ -57 + 13.5x & \text{si} \quad x[5,6] \end{cases}$$



FUNCIONES DE BASE DE LAGRANGE

Vamos a utilizar una función de base por cada punto.

Explicaremos en profundidad la primera y segunda función de base únicamente, pues la última y tercera son similares a ellas respectivamente.

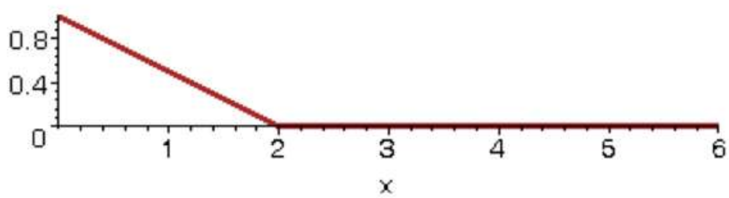
Primera función (punto fijado x=0)

A fin de entender mejor la explicación, escribimos $\frac{x-T}{S-T}$, dónde S será el extremo de cada intervalo que vamos a fijar, mientras que T será el otro extremo de dicho intervalo. Veámoslo en el primer ejemplo:

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{0-2} = \dfrac{2-x}{2} & \text{si} \quad x \in [0,2] \\ 0 & \text{si} \quad x \in [2,6] \end{cases}$$

El punto x=0 solo está en el intervalo [0,2], motivo por el que solo aparecen dos ramas para éste polinomio. El valor que toma esta primera función en el resto de puntos (intervalo [2,6]) es 0 (rama nula).

En las representaciones gráficas de cada función de base, el punto que fijamos le daremos el valor 1, mientras que al resto de puntos del soporte les daremos el valor 0. Por ejemplo,en este primer caso f(0)=1, pues el punto que hemos fijado es x=0, mientras que f(2)=0, f(5)=0 y f(6)=0. Lo vemos a continuación:



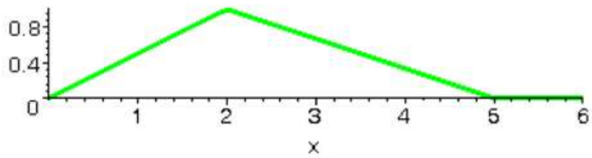
La segunda y tercera funciones, tienen una pequeña variación.

Segunda función (x=2)

Fijamos el punto x=2, que está en dos intervalos, por lo que en este caso, contaremos con tres ramas para la función de base. El valor de la función en el intervalo [5,6], en el que no está incluido el 2 es 0 (rama nula). La segunda función de base es la siguiente:

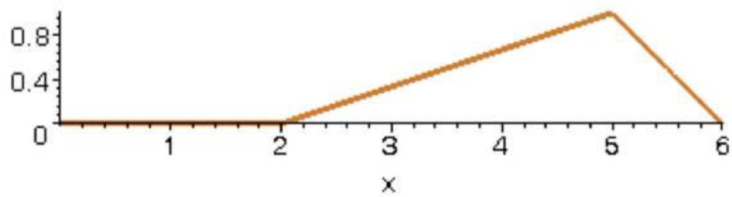
$$\varphi_1(x)=\begin{cases} \dfrac{x-0}{2-0}=\dfrac{x}{2} & \text{si} \quad x\in[0,2] \\ \dfrac{x-5}{2-5}=\dfrac{5-x}{3} & \text{si} \quad x\in[2,5] \\ 0 & \text{si} \quad x\in[5,6] \end{cases}$$

La representación gráfica:



Tercera función (x=5)

Es muy similar a la segunda:

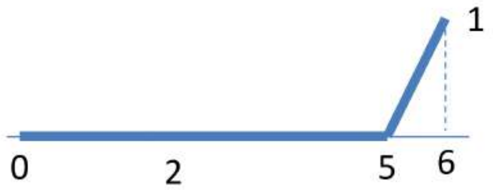


$$\varphi_2(x)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x\in[0,2] \\ \dfrac{x-2}{5-2}=\dfrac{x-2}{3} & \text{si} \quad x\in[2,5] \\ \dfrac{x-6}{5-6}=6-x & \text{si} \quad x\in[5,6] \end{cases}$$

Cuarta función(x=6)

Presenta grandes similitudes con la primera función:

$$\varphi_3(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in [0,5] \\ \dfrac{x-5}{6-5} = x-5 & \text{si} \quad x \in [5,6] \end{cases}$$



Una vez tenemos todas las funciones de base, podemos escribir la función polinómica interpoladora, en la que cada rama será de la forma f(xi)* i(x)+f(xi+1)* i+1(x)=....

$$u(x) = \begin{cases} 3\varphi_0(x) + 6\varphi_1(x) = \dfrac{3}{2}(2-x) + 6\dfrac{x}{2} = 3 + \dfrac{3}{2}x & si \ x \in [0,2] \\ 6\varphi_1(x) + 10.5\varphi_2(x) = 6\dfrac{5-x}{3} + 10.5\dfrac{x-2}{3} = 3 + \dfrac{3}{2}x & si \ x \in [2,5] \\ 10.5\,\varphi_2(x) + 24\,\varphi_3(x) = 10.5(6-x) + 24\,(x-5) = -57 + 13.5x & si \ x \in [5,6] \end{cases}$$

Como podemos observar, llegamos, lógicamente a la misma solución que con el método anterior. Todos los caminos llevan a Roma... o a la función ;) .

Esperamos que lo hayáis entendido genial, y recordad... ¡entender los algoritmos es VITAL!