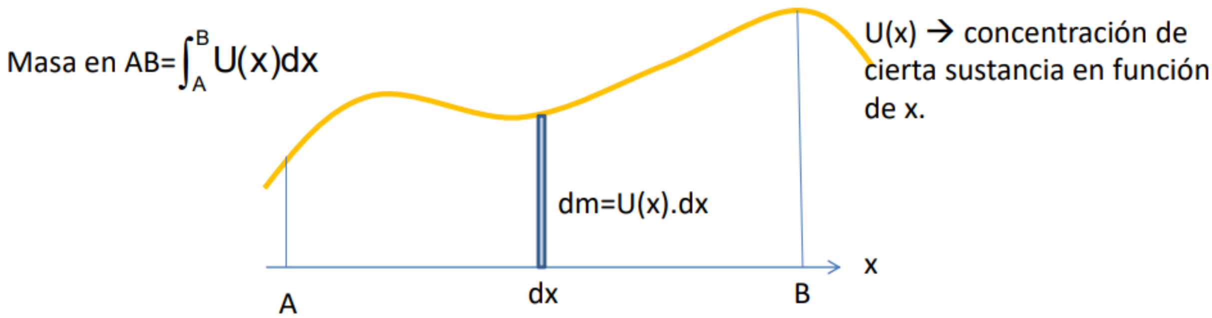
INTEGRACIÓN NUMÉRICA

La integración nos sirve para calcular áreas, como, por ejemplo: áreas de una superficie, la masa a partir de una función de concentración o densidad, momentos de inercia, trabajo realizado por una fuerza, calcular volúmenes, áreas y volúmenes de revolución o longitudes…



Para calcular las integrales numéricamente de una manera aproximada podemos hacerlo integrando el polinomio interpolador.

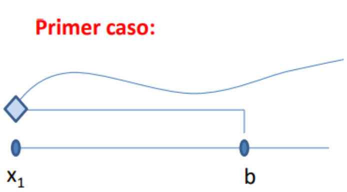
¿Cómo hacemos para obtener integrales a partir de valores discretos?
Podemos interpolar e integrar el polinomio interpolador (en dos pasos, el primero interpolar la función, y un segundo que es integrar el polinomio obtenido en el paso 1).

Podemos aplicar interpolación numérica para
→Cuando conocemos valores puntuales y queremos calcular la integral
→Cuando debido a la función a integrar es complicado obtener el valor de la integral o no sabemos o no queremos calcular el valor exacto.
→A veces para resolver integrales que no existe ningún método exacto para resolverla, aunque su solución si lo sea.

$$I = \int_a^b e^{-x^2} dx$$

El valor de I existe porque es el área encerrada entre la función y el eje de abscisas entre los límites a, b; pero no la podemos calcular de forma exacta.
No hay más remedio que recurrir a integr numérica.

NOS INTERESA FÓRMULAS DE INTEGRACIÓN NUMÉRICA DE TIPO INTERPOLATORIO (FINTI)
Son aquellas obtenemos integrando el polinomio interpolador
CASO 1→ FÓRMULA DEL RECTÁNGULO



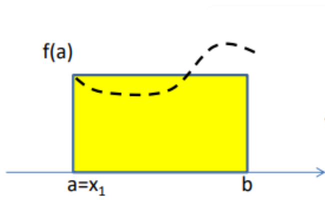
$$\int_{x_1}^{b} f(x)dx \approx f(x_1)(b - x_1)$$

$$\int_{x_1}^{b} f(x)dx \approx f(b)(b - x_1)$$

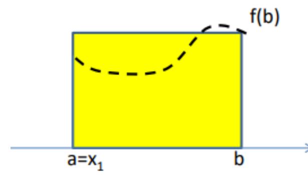
Esta fórmula es mejor (mayor ajuste) cuanto menor pendiente tiene la curva, por tanto, si f(x) es constante, entonces la fórmula es exacta.

Se denomina FÓRMULA DEL RECTÁNGULO.
El polinomio interpolador con solo un punto de soporte (x_1) es una constante

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p(x)dx = \int_a^b f(x_1)dx = f(x_1)\int_a^b dx = f(x_1)(b-a)$$



$$\int_a^b f(x)dx \approx f(a)(b-a)$$



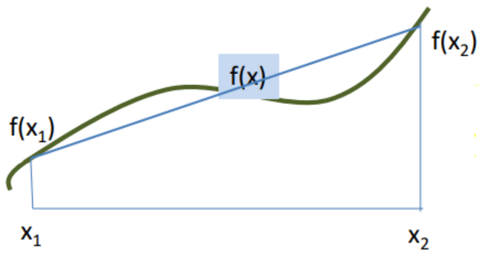
$$\int_a^b f(x)dx \approx f(b)(b-a)$$

CASO 2→ FÓRMULA DEL TRAPECIO

Se denomina FÓRMULA DEL TRAPECIO

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}(x_2-x_1)$$

Considerando la siguiente situación



Donde $f(x_1)$ y $f(x_2)$ son conocidos

También se puede obtener

$$f(x) \approx p(x) = f(x_1) + f[x_1,x_2](x-x_1) = f(x_1) + \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx \approx \int_{x_1}^{x_2} p(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} (f(x_1) + f[x_1,x_2](x-x_1))dx = f(x_1)(x_2-x_1) + \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\left(\frac{x_2^2-x_1^2}{2} - x_1(x_2-x_1)\right)$$

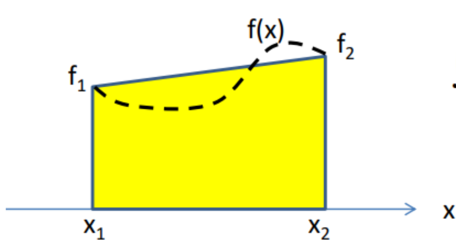
$$= (x_2-x_1)\left[f(x_1) + \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\left(\frac{x_2+x_1}{2} - x_1\right)\right] = (x_2-x_1)\left[f(x_1) + \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right)\right] =$$

porque $x_2^2 - x_1^2 = (x_2-x_1)(x_2+x_1)$

$$= (x_2-x_1)\left[f(x_1) + \frac{f(x_2)-f(x_1)}{2}\right] = \frac{f(x_2)+f(x_1)}{2}(x_2-x_1)$$

Tenemos un soporte con dos puntos $\{x_1, x_2\}$ y conocemos cuánto vale cierta función en esos dos puntos $\{f(x_1), f(x_2)\}$

FÓRMULA DEL TRAPECIO es exacta para polinomios de primer orden)

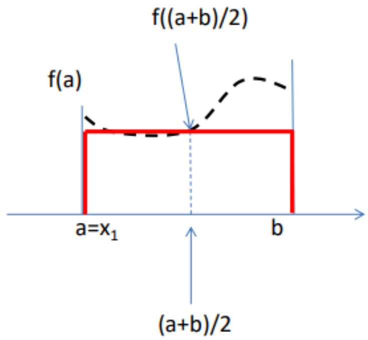


$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}(x_2-x_1)$$

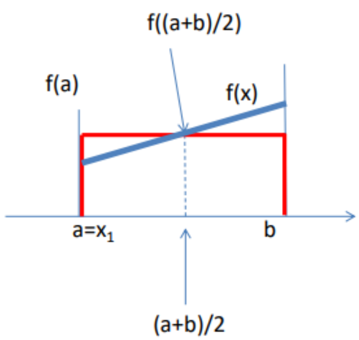
EN RESUMEN→ Lo que haremos es obtener fórmulas de aproximación de las integrales de tipo interpolatorio (basada en construir el polinomio interpolador e integrarlo).

En el caso de no tener la expresión explícita de la función sino que conocemos valores puntuales (discretos), entonces construiremos el polinomio interpolador y lo integramos.

CASO 3→ FÓRMULA DEL PUNTO MEDIO



$$\int_a^b f(x)dx \approx f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)$$

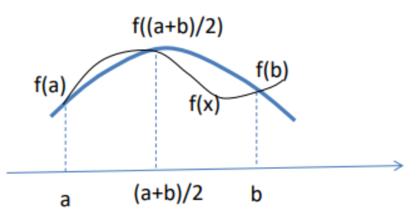


$$\int_a^b f(x)dx = f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)$$

si f(x) polinomio primer grado o menor

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)$$

Es exacta para polinomios de grado menor o igual a 3



$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p(x)dx =$$

$$= \int_a^b \left(f(a) + f\left[a, \frac{a+b}{2}\right](x-a) + f\left[a, \frac{a+b}{2}, b\right](x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)\right)dx =$$

$$= \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

FÓRMULA DE SIMPSON

Las fórmulas anteriores responden a $\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p(x)dx = \sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i)$

n=1→ rectángulo, punto medio
n=2→trapecio
n=3→fórmula de Simpson

RESUMEN

RECTÁNGULO→

c_1=(b-a); x_1=a o x_1=b $\qquad \int_a^b f(x)dx \approx f(a)(b-a)$

PUNTO MEDIO→

c_1=(b-a); x_1=(a+b)/2 $\qquad \int_a^b f(x)dx = f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)$

TRAPECIO→

c_1= c_2 =(b-a)/2; x_1=a; x_2=b $\qquad \int_a^b f(x)dx \approx \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)$

También

c_1=(b-a)/6; c_2 =4(b-a)/6;
c_3=(b-a)/6

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$$

x_1=a; x_2=(a+b)/2; x_3=b

Se cumple

$$\sum_{i=1}^{n} c_i = (b-a)$$

LAS FÓRMULAS DE INREGRACIÓN NEMÉRICA QUE EMPLEAN SOPORTES EQUIDISTANTE SE DENOMINAN FÓRMULAS DE NEWTON-COTES (y son de tipo interpolatorio).

NOTA:
La fórmula de Simpson es exacta para polinomios de grado <=3 sin embargo
Si los 3 puntos no son equidistantes (no se llama de Simpson) es exacta para polinomios
De grado <=2

LAS FÓRMULAS DE INTEGRACIÓN NÚMERICA DE TIPO INTERPOLATORIO MÁS PRECISAS SON LAS DE GAUSS

Con un soporte de (n+1) puntos las fórmulas de NC son exactas para polinomios de grado igual o menor de n (salvo excepciones como Simpson: n+1)
Las formulas de Gauss son exactas para polinomios de grado 2n +1

EJEMPLO→ En Gauss si tengo 3 puntos:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i)$$

Si n=2

$$c_1 = 1;\ c_2 = 1;\ x_1 = \frac{a+b}{2} - \frac{(b-a)\sqrt{3}}{6};\ x_2 = \frac{a+b}{2} + \frac{(b-a)\sqrt{3}}{6}$$

Si n=3

$$c_1 = \frac{5}{9};\ c_2 = \frac{8}{9};\ c_2 = \frac{5}{9}$$

$$x_1 = \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2}\sqrt{\frac{3}{5}};\ x_2 = \frac{a+b}{2};\ x_3 = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}$$

Ejercicio→

Considerados los siguientes datos (siempre que h>0)

x	-h	0	2h
y(x)	2	4	10

Aproximar mediantes una fórmula de integración numérica de tipo interpolación con soporte {-h,0,2h}

$$\int_{-h}^{2h} y(x)dx$$

PASO 1 Obtenemos polinomio interpolador:

En este caso por utilizando la fórmula de Newton:

Tabla de diferencias divididas:
$$\begin{array}{llll} -h & 2 & 2/h & 1/(3h^2) \\ 0 & 4 & 3/h & \\ 2h & 10 & & \end{array}$$

Polinomio interpolador= $p(x) = 2 + (2/h)(x+h) + 1/(3h^2)(x+h)x$

PASO 2 Integración del polinomio interpolador

$$\int_{-h}^{2h} y(x)dx \approx \int_{-h}^{2h} \left(2 + (2/h)(x+h) + 1/(3h^2)(x+h)x\right)dx = 16'5h$$