INTEGRACIÓN NUMÉRICA

Integración.

Por el teorema fundamental del cálculo, si F es una primitiva de f, entonces

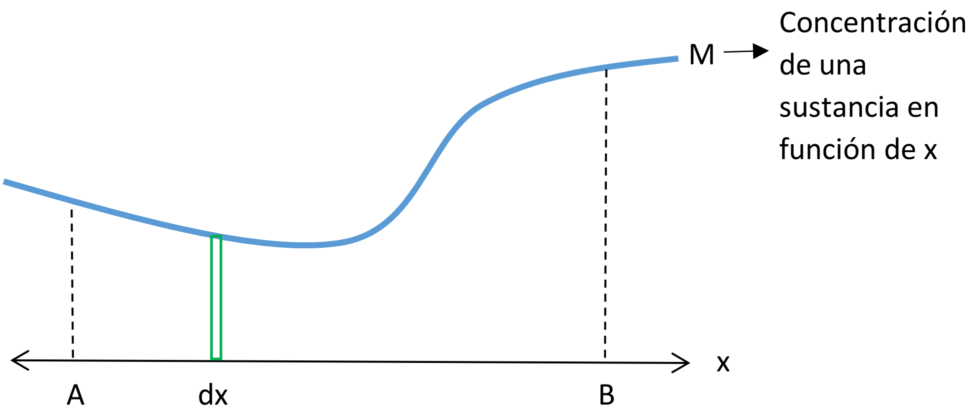
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Sin embargo, no siempre se conoce una primitiva de f o puede ser que la primitiva F no puede expresarse mediante funciones elementales. Aquí es cuando entra en juego la integración numérica.

Integración numérica.

La integración numérica tiene como objetivo calcular el valor numérico de una integral definida y se usa, a veces, para resolver ecuaciones diferenciales, siempre de forma APROXIMADA.

La integral sirve para calcular áreas. Algunas de sus aplicaciones más comunes son el cálculo del área de una superficie, la masa a partir de una función de concentración (o densidad), el momento de inercia, el trabajo que realiza una fuerza, volúmenes, longitudes…



dm= M(x)·dx $\longrightarrow$ Masa contenida en dx

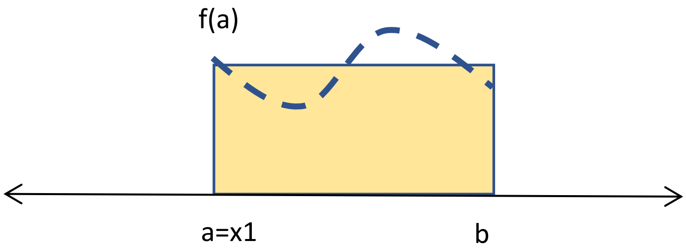
Masa en el intervalo A-B: $\int_A^B M(x)dx$

Lo que haremos entonces es obtener fórmulas de aproximación de las integrales de tipo interpolatorio (basadas en construir el polinomio interpolador e integrarlo). Si carecemos de la función explícita y solo conocemos valores puntuales (discretos), construiremos el polinomio interpolador y lo integraremos.

<u>LAS FÓRMULAS QUE EMPLEAN SOPORTES EQUIDISTANTES SE DENOMINAN FÓRMULAS DE NEWTON-COTES</u>

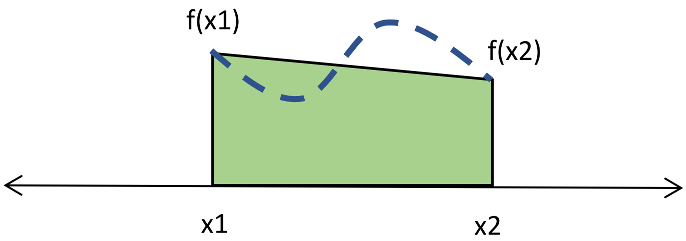
FÓRMULA DEL RECTÁNGULO.

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \text{f(a)}\ (b-a)}$$



FÓRMULA DEL TRAPECIO

$$\boxed{\int_{x1}^{x2} f(x)dx \approx \frac{f(x1)+f(x2)}{2}\ (x2-x1)}$$



Podemos obtenerla por interpolación:

$$\text{f(x)} \approx p(x) = f(x1) + f[x1,x2](x-x1) = f(x1) + \frac{f(x2)-f(x1)}{x2-x1}(x-x1)$$

$$\rightarrow \boxed{\int_{x1}^{x2} f(x)dx} \approx \int_{x1}^{x2} p(x)dx \approx \int_{x1}^{x2} \left(f(x1) + \frac{f(x2)-f(x1)}{x2-x1}(x-x1) \right) \text{dx} =$$

$$f(x1)(x2-x1) + \frac{f(x2)-f(x1)}{x2-x1}\left(\frac{x2^2-x1^2}{2} - x1(x2-x1) \right) =$$

$$(x2-x1)\left[f(x1) + \frac{f(x2)-f(x1)}{x2-x1}\left(\frac{x2+x1}{2} - x1 \right) \right] =$$

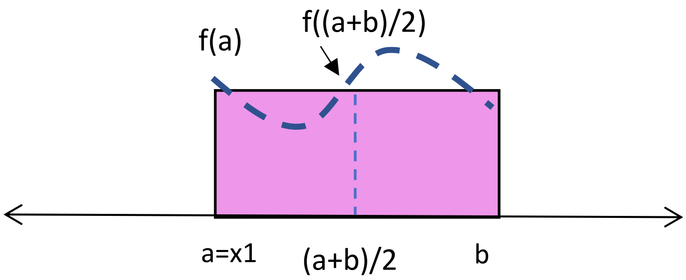
$$(x2-x1)\left[f(x1) + \frac{f(x2)-f(x1)}{x2-x1}\left(\frac{x2-x1}{2} \right) \right] =$$

$$\boxed{\frac{f(x1)+f(x2)}{2}\ (x2-x1)}$$

<u>LA FÓRMULA DEL TRAPECIO ES EXACTA PARA UN POLINOMIO DE PRIMER GRADO</u>

FÓRMULA DEL PUNTO MEDIO (MID-POINT RULE)

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)}$$



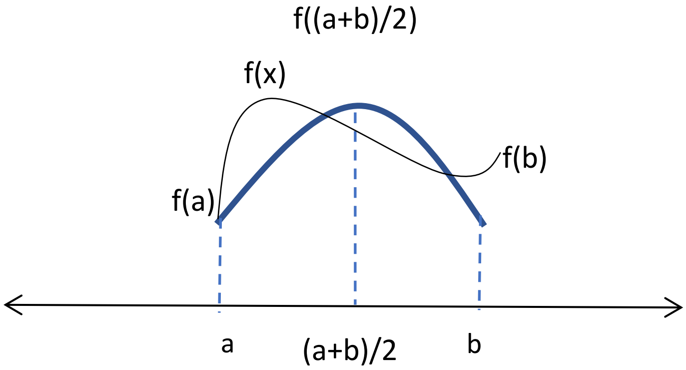
*En el fondo, las fórmulas del punto medio y trapecio son iguales.

FÓRMULA DEL SIMPSON

$$\rightarrow \boxed{\int_a^b f(x)dx} \approx \int_a^b p(x)dx =$$

$$\int_a^b f(a) + f\left[a,\frac{a+b}{2}\right](x-a) + f\left[a,\frac{a+b}{2},b\right](x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right) dx =$$

$$\boxed{\frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\,\frac{a+b}{2}+f(b)\right]}$$



LA FÓRMULA DEL SIMPSON ES EXACTA PARA POLINOMIOS DE GRADO MENOR O IGUAL A 2

CUÁNDO SE USA CADA UNA

Partiendo de la siguiente fórmula,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p(x)dx = \sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i)$$

Si **n= 1**, usaremos la del rectángulo o punto medio

Si **n=2**, usaremos la del trapecio

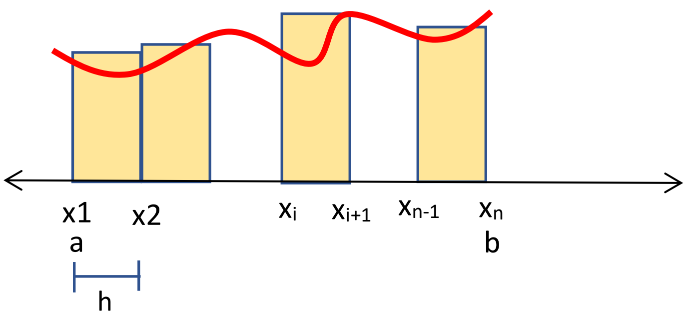
Si **n=3**, usaremos la de Simpson

INTEGRACIÓN COMPUESTA

Si dividimos el intervalo en un número n de subintervalos y Hallamos una aproximación para cada uno de ellos y finalmente sumamos todos los resultados obtenemos las reglas de integración compuesta.

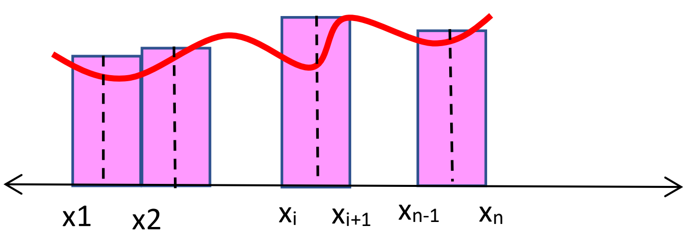
FÓRMULA DEL RECTÁNGULO COMPUESTA

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx h\sum_{i=1}^{n-1} f(xi)}$$



FÓRMULA DEL PUNTO MEDIO COMPUESTA

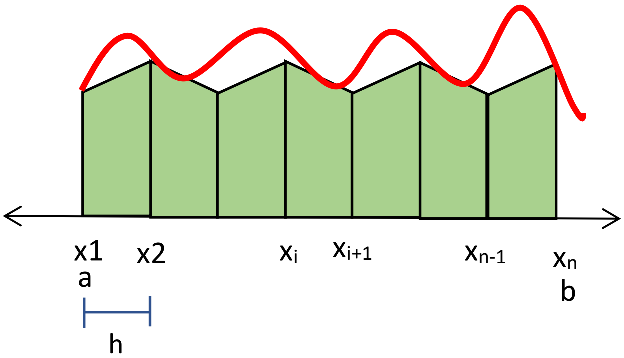
$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx h\sum_{i=1}^{n-1} f\left(x_i+\frac{h}{2}\right)} = \boxed{\int_a^b f(x)dx \approx h\sum_{i=1}^{n-1} f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)}$$



FÓRMULA DEL TRAPECIO COMPUESTA

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1} h_i\,(f(x_{i+1})+f(x_i))$$

*cada subintervalo vale $h_i = x_{i+1} - x_i$



FÓRMULA DEL SIMPSON COMPUESTA

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{6}\left(f(a) + 4\left(\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} f(x_{2i})\right) + 2\left(\sum_{i=1}^{\frac{n-3}{2}} f(x_{2i+1})\right) + f(b)\right)$$