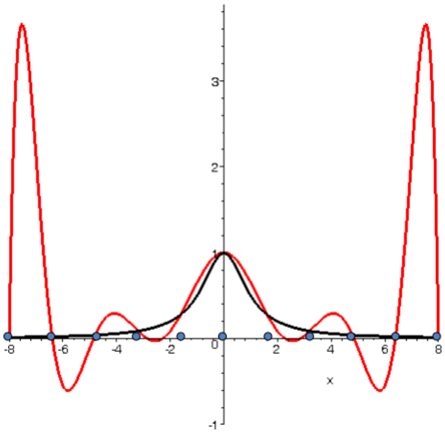
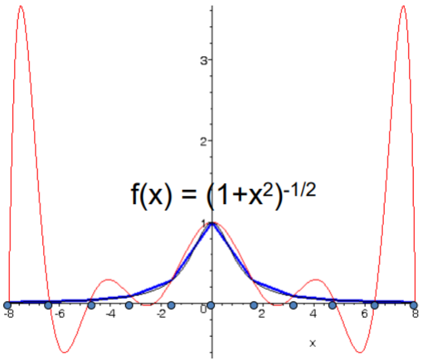
INTERPOLACIÓN DE LAGRANGE A TROZOS

Cuando se utiliza el polinomio interpolador de Lagrange para obtener la aproximación a una función suele ser preciso, aunque si esta función es de grado alto, estos resultados pueden no ser precisos.

En este caso se puede ver una función de grado elevado, en la cual se ha intentado aproximar por interpolación. Como se puede ver los resultados no son precisos porque le polinomio tienen naturaleza oscilante.



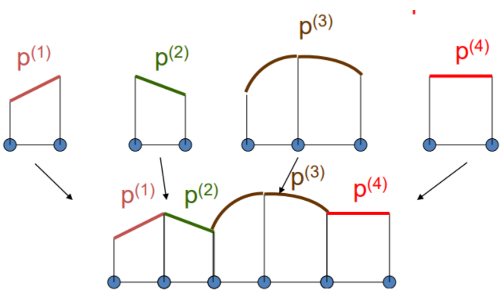
En estos casos lo que se hace es dividir el polinomio en tramos equidistantes, con un menor número de puntos, e interpolar en cada uno de estos tramos. Tras unir todos estos tramos obtendremos una función muy aproximada. (Se recomienda siempre que el grado de la función sea superior a 3)



La función obtenida no será un polinomio, pero estará formada por tramos polinómicos
Esta función en su conjunto no es derivable, pero si lo es en cada uno de sus tramos

Para este otro ejemplo se ha aproximado una función con varios puntos, dividiéndola en cuatro trozos más pequeños, cada trozo es una función.

Las funciones p_1, p_3 y p_4 son de grado 1, por lo que se ha interpolado en un intervalo de dos puntos, mientras que la función p_3 es de grado dos, por lo que se ha interpolado en un intervalo de tres puntos.



La función interpoladora será la siguiente:

$$u(x) = \begin{cases} p_1(x) = a_1 + b_1 \cdot x & \text{si } x \in [x_0, x_1] \\ p_2(x) = a_2 + b_2 \cdot x & \text{si } x \in [x_1, x_2] \\ p_3(x) = a_3 + b_3 \cdot x + c_3 \cdot x & \text{si } x \in [x_2, x_4] \\ p_4(x) = a_4 + b_4 \cdot x & \text{si } x \in [x_4, x_5] \end{cases}$$

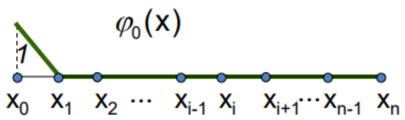
Otra manera de resolverlo es utilizando las denominadas funciones de base o hat functions, que son funciones polinómicas en cada intervalo.

$$u(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i \varphi_i(x)$$

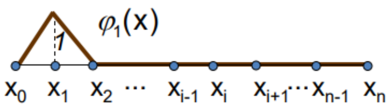
Para cada punto del intervalo tendremos una función de base, de modo que en el punto la función valdrá uno y en todos los puntos restantes valdrá cero. Esto habrá que hacerlo para cada punto se soporte.

$$\varphi_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i = j \end{cases}$$

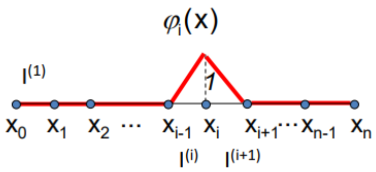
$$\varphi_i(x_j) = \begin{cases} \dfrac{x - x_1}{x_0 - x_1} & \text{si } x \in [x_0, x_1] \\ 0 & \text{si } x \in [x_1, x_n] \end{cases}$$



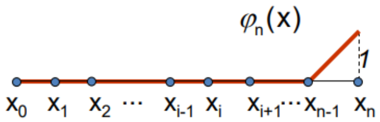
$$\varphi_i(x_j) = \begin{cases} \dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0} & \text{si } x \in [x_0, x_1] \\ \dfrac{x - x_2}{x_1 - x_2} & \text{si } x \in [x_1, x_2] \\ 0 & \text{si } x \in [x_2, x_n] \end{cases}$$



$$\varphi_i(x_j) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & \text{si } x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \dfrac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} & \text{si } x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0 & \text{si } x \in [x_0, x_{i-1}] U [x_{i+1}, x_n] \end{cases}$$



$$\varphi_i(x_j) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} & \text{si } x \in [x_{n-1}, x_n] \\ 0 & \text{si } x \in [x_0, x_{n-1}] \end{cases}$$



A continuación, adjunto **un ejercicio** para aclarar estos conceptos más:
Se pide determinar la función continua polinómica de primer grado a trozos que interpola a una función f(x) de la que se conocen los siguientes datos:

x	0	2	5	6
f(x)	3	6	10,5	24

Aunque el ejercicio pedía que se resolviera por varios métodos distintos, solo se va a resolver aplicando polinomios de base, ya que es lo que se ha explicado. También se podría resolver aplicando la definición de interpolación de Lagrange o la fórmula de Newton.

Se empezará determinando cuantos intervalos tiene la función, en este caso habrá tres intervalos. Y se utilizarán los polinomios de base, en cada uno de estos intervalos, para calcular la función de la recta de cada intervalo:

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} \dfrac{x - 2}{0 - 2} = \dfrac{2 - x}{2} & \text{si } x \in [0,2] \\ 0 & \text{si } x \in [2, 6] \end{cases}$$

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & \text{si } x \in [0,2] \\ \dfrac{x - 5}{2 - 5} = \dfrac{5 - x}{3} & \text{si } x \in [2, 5] \\ 0 & \text{si } x \in [5, 6] \end{cases}$$

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,2] \\ \dfrac{x - 2}{5 - 2} = \dfrac{x - 2}{3} & \text{si } x \in [2, 5] \\ \dfrac{x - 6}{5 - 6} = 6 - x & \text{si } x \in [5, 6] \end{cases}$$

$$\varphi_3(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 5] \\ x - 5 & \text{si } x \in [5, 6] \end{cases}$$

Se sustituye en la siguiente fórmula para obtener la función de la recta en cada intervalo:

$$u(x) = \begin{cases} 3\varphi_0(x) + 6\varphi_1(x) = 3\dfrac{2 - x}{2} + 6\dfrac{x}{2} = 3 + 1,5x & \text{si } x \in [0,2] \\ 6\varphi_1(x) + 10,5\varphi_2(x) = 6\dfrac{5 - x}{3} + 10,5\dfrac{x - 2}{3} = 3 + 1,5x & \text{si } x \in [2, 5] \\ 10,5\varphi_2(x) + 24\varphi_3(x) = 10,5(6\text{-}x) + 24(x - 5) = -57 + 13,5x & \text{si } x \in [5, 6] \end{cases}$$