Solución ejercicios interpolación de Lagrange

1. Obtener el polinomio interpolador de Lagrange para cierta función f de la que conocemos que: f(-1)=1; f(0)=-1 ; f(2)=2 y f(3)=2.

Solución

En primer lugar, calculamos los polinomios de Lagrange aplicando la fórmula ($L_i(x)$) escrita abajo:

$$L_1(x) = \frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(-1-0)(-1-2)(-1-3)} = \frac{(x)(x-2)(x-3)}{-12}$$

$$L_2(x) = \frac{(x+1)(x-2)(x-3)}{(0+1)(0-2)(0-3)} = \frac{(x+1)(x-2)(x-3)}{6}$$

$$L_3(x) = \frac{(x+1)(x-0)(x-3)}{(2+1)(2-0)(2-3)} = \frac{(x+1)(x)(x-3)}{-6}$$

$$L_4(x) = \frac{(x+1)(x-0)(x-2)}{(3-0)(3+1)(3-2)} = \frac{(x+1)(x)(x-2)}{12}$$

Ahora el polinomio interpolador con la fórmula p(x):

$$P(x) = L_1(x)*f(-1) + L_2(x)*f(0) + L_3(x)*f(2) + L_4(x)*f(3)$$

$$P(x) = 1*\frac{(x)(x-2)(x-3)}{-12} - 1*\frac{(x+1)(x-2)(x-3)}{6} + 2*\frac{(x+1)(x)(x-3)}{-6} + 2\frac{(x+1)(x)(x-2)}{12}$$

$$P(x) = \frac{(x^3-5x^2+6x)}{-12} - 1*\frac{(x^3-4x^2+x+6)}{6} + 2*\frac{(x^3-2x^2-3x)}{-6} + 2\frac{(x^3-2x^2+x^2-2x)}{12}$$

$$P(x) = \frac{-x^3+5x^2-6x}{12} + \frac{-2x^3+8x^2-2x-12}{12} + \frac{-4x^3+8x^2+12x}{12} + \frac{2x^3-2x^2-4x}{12}$$

$$P(x) = \frac{-5x^3+19x^2-12}{12}$$

$$P(x) = \frac{-1}{12}*(5x^3-19x^2+12)$$

¡RECORDATORIO!
Fórmulas que tenemos que usar:

$$p(x) = L_1(x)F_1 + L_2(x)F_2 + L_3(x)F_3 + \ldots + L_n(x)F_n$$

$$L_i(X) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{X - X_j}{X_i - X_j}$$

■

2. Obtener el polinomio interpolador de Lagrange para cierta función f(x) de la que conocemos: f(-2)=0; f(0)=1; f(1)=-1. Idem por Newton, Diferencias Divididas. Escribirlo en la forma $a_0 + a_1x + a_2x^2$ para comprobar que son idénticos.

Solución.

Por Lagrange:

$$L_1(x) = \frac{(x-0)(x-1)}{(-2-0)(-2-1)} = \frac{(x^2-x)}{6}$$

$$L_2(x) = \frac{(x+2)(x-1)}{(0+2)(0-1)} = \frac{(x^2+x-2)}{-2}$$

$$L_3(x) = \frac{(x+2)(x-0)}{(1+2)(1-0)} = \frac{(x^2+2x)}{3}$$

Por lo tanto:

$$P(x) = L_1(x)*f(-2)+ L_2(x)*f(0)+ L_3(x)*f(1)= = L_1(x)*0+ L_2(x)- L_3(x)=$$

$$P(x) = \frac{-x^2-x+2}{2} + \frac{-x^2-2x}{3} = \frac{-3x^2-3x+6}{6} + \frac{-2x^2-4x}{6} = \frac{-5x^2-7x+6}{6}$$

$$P(x) = \frac{-1}{6} *(5x2+7x-6) = -0.833333x^2 - 1.166666x + 1$$

Por Newton:

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
−2	0	0.5	−0.833333
0	1	−2	
1	−1		

Con ello:

$$f[x_i,x_{i+1}] = f(x_{i+1}) - f(x_i)/ x_{i+1} - x_i$$
$$f[-2,0] = 1 -0/ 0 + 2 = 0.5$$
$$f[0,1] = -1 -1/ 1 - 0 = -2$$

$$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}] = f[x_{i+1},x_{i+2}]- f[x_i,x_{i+1}]/ x_{i+2} - x_i =$$
$$((f(x_{i+2}) - f(x_{i+1})/ x_{i+2} - x_{i+1})-(f(x_{i+1}) - f(x_i)/ x_{i+1} - x_i))/ x_{i+2} - x_i$$
$$f[-2,0,1]= -2-0.5/3= -0.833333$$

$$P(x) = f(x_i) + f[x_i,x_{i+1}] * (x - x_i) + f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]* (x - x_i) (x - x_{i+1})$$
$$P(x) = f(-2) + f[-2,0] * (x + 2) + f[-2,0,1]* (x + 2) (x)$$

$$P(x) = 0 + 0.5(x + 2) - 0.833333(x + 2)x = -0.833333x^2 - 1.166666x + 1.$$

■