INTERPOLACIÓN DE LAGRANGE: FÓRMULA DE NEWTON

Como ya sabréis, existen tres métodos para realizar la interpolación de Lagrange:

- Mediante un sistema de ecuaciones que sale de la definición p(Xi)=f(i), siendo p(x) el polinomio interpolador y f(x) los puntos de soporte de la función a interpolar.

$$\begin{aligned}
p(a) = f(a) &\Rightarrow \boxed{c_1 + c_2 a + c_3 a^2 + c_4 a^3 = f(a)} \\
p'(a) = f'(a) &\Rightarrow c_2 + 2c_3 a + 3c_4 a^2 = f'(a) \\
p(b) = f(b) &\Rightarrow c_1 + c_2 b + c_3 b^2 + c_4 b^3 = f(b) \\
p'(b) = f'(b) &\Rightarrow c_2 + 2c_3 b + 3c_4 b^2 = f'(b)
\end{aligned}$$

  *Si se usan las derivadas la interpolación recibe el nombre de **interpolación de Hermite.**

- Mediante el uso de polinomios de base, donde p(x) es el polinomio interpolador, f(x) los puntos de soporte de la función a interpolar y L(x) los polinomios de base.

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n} L_i(x) f_i; \quad \text{donde} \quad L_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ i \neq i}}^{n} \frac{x - X_j}{X_i - X_j} \quad (i = 1, \ldots, n)$$

- Por la fórmula de Newton, que será explicada en este recurso.

FÓRMULA DE NEWTON

El primer paso es elaborar a tabla de diferencias divididas: el objetivo es conseguir una tabla como esta, siendo este un ejemplo concreto de un soporte de 5 puntos (s[i]) con sus 5 valores correspondientes (f[s_i]).

	j=1	j=2	j=3	j=4	j=5	
s_1	$f(s_1)$	$f[s_1,s_2]$	$f[s_1,s_2,s_3]$	$f[s_1,s_2,s_3,s_4]$	$f[s_1,s_2,s_3,s_4,s_5]$	i=1
s_2	$f(s_2)$	$f[s_2,s_3]$	$f[s_2,s_3,s_4]$	$f[s_2,s_3,s_4,s_5]$	0	i=2
s_3	$f(s_3)$	$f[s_3,s_4]$	$f[s_3,s_4,s_5]$	0	0	i=3
s_4	$f(s_4)$	$f[s_4,s_5]$	0	0	0	i=4
s_5	$f(s_5)$	0	0	0	0	i=5

Diferencia dividida de orden 0

Orden 2

Orden 3

Orden 4

Diferencia dividida de orden 1

Para calcular cada una de las diferencias divididas, las fórmulas son:

- **Orden 0:** el valor de la diferencia dividida de orden 0 coincide con el valor del punto en la función.

  $$f[x_i] = f(x_i)$$

- **Orden 1:**

  $$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

- **Orden 2:**

  $$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}$$

  Si sustituimos estos valores, quedaría:

  $$= \frac{\frac{f(x_{i+2}) - f(x_{i+1})}{x_{i+2} - x_{i+1}} - \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}}{x_{i+2} - x_i} =$$

  $$= \frac{f(x_{i+2}) - f(x_{i+1})}{(x_{i+2} - x_{i+1})(x_{i+2} - x_i)} - \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{(x_{i+1} - x_i)(x_{i+2} - x_i)}$$

- **Orden n** (cualquier valor)**:**

  $$f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+n-1}, x_{i+n}] = \frac{f[x_{i+1}, \ldots, x_{i+n}] - f[x_i, \ldots, x_{i+n-1}]}{x_{i+n} - x_i}$$

Una vez tenemos esta tabla, procedemos a obtener el polinomio interpolador p(x):

$$p(x) = f(s_1) + \sum_{i=2}^{n} \left(f[s_1, s_2, \ldots, s_i] \prod_{j=1}^{i-1} (x - s_j) \right)$$

Aunque esta fórmula pueda impresionar de primeras, realmente consiste en ir cogiendo las diferencias divididas de la primera fila de la matriz e irlas multiplicando por "x" menos los puntos correspondientes. Es decir:

$$p(x) = f(s_1) + f[s_1, s_2](x - s_1) + f[s_1, s_2, s_3](x - s_1)(x - s_2) +$$
$$+ f[s_1, s_2, s_3, s_4](x - s_1)(x - s_2)(x - s_3) +$$
$$+ f[s_1, s_2, s_3, s_4, s_5](x - s_1)(x - s_2)(x - s_3)(x - s_4)$$