Método de la tabla de diferencias divididas

Después de haber visto dos métodos para calcular un polinomio interpolador, ahora veremos una forma más sencilla y cómoda, que es la tabla de diferencias divididas a través de la fórmula de Newton.
Supongamos que queremos calcular el polinomio interpolador de una función f(x) sobre unos puntos dados a través del polinomio de Lagrange. Una vez calculado, queremos añadir un punto más. Pues bien, los dos métodos que hemos visto anteriormente nos obligarían a realizar los cálculos de nuevo, en cambio, si usamos la tabla de diferencias divididas podríamos hallar de forma progresiva los polinomios interpoladores de grados crecientes al ir incorporando nuevos puntos conservando el obtenido anteriormente.

Fórmula de Newton

$$P_k(x) = \sum_{i=0}^{k} f[x_0 \dots x_i] \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)$$

De forma desarrollada:

$$\mathbf{P}_{\mathrm{k}}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}[\mathbf{x_0}] + \mathbf{f}[\mathbf{x_0}, \mathbf{x_1}](\mathbf{x} - \mathbf{x_0}) + \mathbf{f}[\mathbf{x_0}, \mathbf{x_1}, \mathbf{x}_2](\mathbf{x} - \mathbf{x_0})(\mathbf{x} - \mathbf{x_1}) + \mathbf{f}[\mathbf{x_0}, \mathbf{x_1}, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{\mathrm{i}}](\mathbf{x} - \mathbf{x_0})(\mathbf{x} - \mathbf{x_1}) \dots .(\mathbf{x} - \mathbf{x_j})$$

$f[x_0 \dots x_i]$ = Diferencia dividida de f en (x_1 , x_2....x_i)
En primer lugar, para calcular el polinomio interpolador vamos a centrarnos en esta expresión, ya que a partir de ella construiremos la tabla de diferencias divididas que se encuentra a continuación y que debemos memorizar ya que nos permitirá calcular los coeficientes del polinomio.

Tabla de diferencias divididas

x_i	f(x)	Primera diferencia	Segunda diferencia	Tercera diferencia
x_0	$f(x_0)$	$f[x_0,x_1]=\frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}$	$f[x_0,x_1,x_2]=\frac{f[x_1-x_2]-f[x_0-x_1]}{x_2-x_0}$	$f[x_0,x_1,\mathrm{x}_2,x_3]=\frac{f[x_1,\mathrm{x}_2,x_3]-f[x_0,x_1,\mathrm{x}_2]}{x_3-x_0}$
x_1	$f(x_1)$	$f[x_1,x_2]=\frac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1}$	$f[x_1,x_2,x_3]=\frac{f[x_2-x_3]-[x_1-x_2]}{x_3-x_1}$	$f[x_1,x_2,x_3,x_4]=\frac{f[x_1,\mathrm{x}_2,x_3]-f[x_0,x_1,\mathrm{x}_2]}{x_4-x_1}$
x_2	$f(x_2)$	$f[x_2,x_3]=\frac{f[x_3]-f[x_2]}{x_3-x_2}$	$f[x_2,x_3,x_4]=\frac{f[x_3-x_4]-f[x_2-x_3]}{x_4-x_2}$	
x_3	$f(x_3)$	$f[x_3,x_4]=\frac{f[x_4]-f[x_3]}{x_4-x_3}$		
x_4	$f(x_4)$			

De forma esquemática:

x_i	$f(x_i)$	Primero	Segundo	Tercero
x_0	$f(x_0)$	$f[x_1, x_0]$	$f[x_2, x_1, x_0]$	$f[x_3, x_2, x_1, x_0]$
x_1	$f(x_1)$	$f[x_2, x_1]$	$f[x_3, x_2, x_1]$	
x_2	$f(x_2)$	$f[x_3, x_2]$		
x_3	$f(x_3)$			

Una vez hayamos hecho la tabla solo tenemos que aplicar la fórmula de Newton (desarrollada) sustituyendo los datos obtenidos y de esa forma obtendremos el polinomio interpolador que buscamos.

A continuación, resolveremos un ejercicio muy sencillo donde todos estos conceptos quedarán más claros.

EJEMPLO 1:

Dados los siguientes puntos: (1,2), (3,3), (4,2) y (8,10) , calcular el polinomio interpolador que pasa por ellos a través del método de la tabla de diferencias divididas.

1. Tenemos cuatro puntos por lo que sabemos que el polinomio interpolador será de grado 3 y necesitaremos cuatro coeficientes.
2. Hacemos la tabla de diferencias divididas.

x_k	$f[x_k]$	$f[x_k, x_{k+1}]$	$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}]$	$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3}]$
1	$f[1] = 2$	$f[1,3] = \frac{3-2}{3-1} = \frac{1}{2}$	$f[1,3,4] = \frac{-1-\frac{1}{2}}{4-1} = -\frac{1}{2}$	$f[1,3,4,8] = \frac{-\frac{1}{2}-\frac{3}{5}}{8-1} = \frac{11}{70}$
3	$f[3] = 3$	$f[3,4] = \frac{2-3}{4-3} = -1$	$f[3,4,8] = \frac{2+1}{8-3} = \frac{3}{5}$	
4	$f[4] = 2$	$f[4,8] = \frac{10-2}{8-4} = 2$		
8	$f[8] = 10$			

Escribiendo sólo los resultados quedaría tal que así:

x_k	$f[x_k]$	$f[x_k, x_{k+1}]$	$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}]$	$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3}]$
1	2			
		$\frac{1}{2}$		
3	3		$-\frac{1}{2}$	
		-1		$\frac{11}{70}$
4	2		$\frac{3}{5}$	
		2		
8	10			

3. Aplicamos la fórmula de Newton

$$P_3(x) = 2 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)(x-3) + \frac{11}{70}(x-1)(x-3)(x-4) =$$
$$= \frac{11}{70}x^3 - \frac{123}{70}x^2 + \frac{192}{35}x - \frac{66}{55}$$