Ejercicios Interpolación de Lagrange.

Ejercicio 1.

En una planta química se sintetiza un producto que es utilizado posteriormente como conservante de productos enlatados. El rendimiento del proceso depende de la temperatura. Se dispone de los siguientes datos:

Temperatura (ºC)	150	160	170	180	190	200	210
Rendimiento (%)	35.5	40	45	55	55.5	60	65

Se considera un rendimiento óptimo el que va de 38.5 a 50. Si la temperatura de trabajo es de 162 ºC por una avería, ¿será el proceso satisfactorio hasta que sea reparada?

Para poder aproximar el valor de 162 ºC vamos a construir el polinomio interpolador. Lo más sencillo es emplear el método de diferencias divididas.

P(x)= f[x1] + f[x1, x2](x-x1) + f[x1, x2, x3](x-x1)(x-x2) + f[x1, x2, x3, x4](x-x1)(x-x2)(x-x3)

+f[x1, x2, x3, x4, x5](x-x1)(x-x2)(x-x3)(x-x4) + f[x1, x2, x3, x4, x5, x6](x-x1)(x-x2)(x-x3)(x-x4)(x-x5)

+f[x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7](x-x1)(x-x2)(x-x3)(x-x4)(x-x5)(x-x6)

Primero creamos la tabla de diferencias divididas.

x	f(x1)	f[x1,x2]	f[x1,x2,x3]	f[x1,x2,x3,x4]	f[x1,x2,x3,x4,x5]	f[x1,x2,x3,x4,x5,x6]	f[x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7]
150	35.5	$\frac{40-35.5}{160-150}=$ 0,45	$\frac{0,5-0.45}{170-150}=$ 2.510^{-3}	$\frac{0,025-0.0025}{180-150}=$ 7.510^{-4}	$\frac{0,00242-0.00075}{190-150}=$ 4.17510^{-5}	$\frac{4.25^{10-6}-4.175^{10-5}}{200-150}=$ -7.510^{-7}	$\frac{-9.19^{10-7}+7.5^{10-7}}{210-150}=$ -2.7810^{-9}
160	40	$\frac{45-40}{170-160}=$ 0,5	$\frac{1-0.5}{180-160}=$ 0,025	$\frac{-0,0475-0.025}{190-160}=$ 2.4210^{-3}	$\frac{0,00225-0.00242}{200-160}=$ 4.2510^{-6}	$\frac{-4.17^{10-5}-4.25^{10-6}}{210-160}=$ -9.1910^{-7}	
170	45	$\frac{55-45}{180-170}=$ 1	$\frac{0,05-1}{190-170}=$ -0,0475	$\frac{0,02+0,0475}{200-170}=$ 2.2510^{-3}	$\frac{0.000583-0.00225}{190-150}=$ -4.1710^{-5}		
180	55	$\frac{55.5-55}{190-180}=$ 0,05	$\frac{0,45-0.05}{200-180}=$ 0,02	$\frac{0,0025-0.02}{210-180}=$ -5.8310^{-4}			
190	55.5	$\frac{60-55.5}{200-190}=$ 0,45	$\frac{0,5-0.45}{210-190}=$ 2.510^{-3}				
200	60	$\frac{65-60}{210-200}=$ 0,5					
210	65						

Una vez tenemos los coeficientes, podemos construir el polinomio interpolador.

$P(x) = 35.5 + 0,45\ (x-150) + 2.5 10^{-3}\ (x-150)(x-160) + 7.5 10^{-4}\ (x-150)(x-160)(x-170) + 4.175 10^{-5}(x-150)(x-160)(x-170)(x-180) - 7.5 10^{-7}(x-150)(x-160)(x-170)(x-180)(x-190) - -2.78 10^{-9}(x-150)(x-160)(x-170)(x-180)(x-190)(x-200)$

Por último hay que sustituir x=162.

$P(162) = 35.5 + 0,45\ (12) + 2.5 10^{-3}\ (12)(-2) + 7.5 10^{-4}\ (12)(-2)(-8) + 4.175 10^{-5}(12)(-2)(-8)(-18) - 7.5 10^{-7}(12)(-2)(-8)(-18)(-28) - 2.78 10^{-9}(12)(-2)(-8)(-18)(-28)(-38)$

$= 35.5 + 5.4 - 0,06 + 0.142 - 0.144 - 0.07 + 0.01 = 40.778\%$

Como el rendimiento está entre 38.5 y 50, el proceso es satisfactorio.

Ejercicio 2.

En una planta se bombea un compuesto químico desde la base de una columna de fraccionamiento hasta un gran tanque de almacenamiento descubierto. En la siguiente tabla se representan los datos relativos los litros por hora que puede bombear la bomba en función de la potencia en watios a la que es necesario que trabaje:

Potencia (W)	365	370	370.5	380	385
Cantidad (l/h)	500	700	900	1100	1300

Se desea saber si la bomba será capaz de impulsar un caudal de 1000 l/h de trementina hasta el tanque de almacenamiento trabajando a un máximo de 373 w.

Para saber si puede bombear 1000 l/h aproximaremos el caudal que se puede bombear con 373w.

P(x)= f[x1]+ f[x1, x2](x-x1) + f[x1, x2, x3](x-x1)(x-x2)+f[x1, x2, x3, x4](x-x1)(x-x2)(x-x3)

+f[x1, x2, x3, x4, x5](x-x1)(x-x2)(x-x3)(x-x4)

Primero calculamos la tabla de diferencias divididas.

x	f(x)	f[x1,x2]	f[x1,x2,x3]	f[x1,x2,x3,x4]	f[x1,x2,x3,x4,x5]
365	500	$\frac{700-500}{370-365}$= 40	$\frac{400-40}{370.5-365}$= 65.45	$\frac{-37.9-65.45}{380-365}$= -6.89	$\frac{4.45+6.89}{385-365}$= 0.567
370	700	$\frac{900-700}{370.5-370}$= 400	$\frac{21-400}{380-370}$= -37.9	$\frac{1.31+65.45}{385-370}$= 4.45	
370.5	900	$\frac{1100-900}{380-370.5}$= 21	$\frac{40-21}{385-370.5}$= 1.31		
380	1100	$\frac{1300-1100}{385-380}$= 40			
385	1300				

Una vez tenemos los coeficientes, podemos construir el polinomio interpolador.

P(x) = 500 + 40 (x-365) + 65.45 (x-365)(x-370) + -6.89 (x-365)(x-370)(x-370.5) + 0.567 (x-365)(x-370)(x-370.5)(x-380)

Sustituimos en x=373, para ver qué caudal puede bombearse.

P(x) = 500 + 40 (8) + 65.45 (8)(3) - 6.89 (8)(3)(2.7) + 0.567 (8)(3)(2.7)(-7) =
500 + 320 + 1579.8 - 446.5 - 257.2 = 1696.1 l/h

El caudal es superior a 1100 l/h, por lo que la bomba sí que será capaz de bombear el caudal con una potencia de 373w.

Ejercicio 3 (examen 2020).

En un reactor químico se ha medido la temperatura (T) que se alcanza en 5 posiciones dadas por x={0,1,5,7,10}, obteniendo la siguiente tabla:

x (metros)	0	1	5	7	10
T (Kelvin)	280	380	300	294	225

a) **Estimar el valor del flujo calorífico, Φ=-D.T'(x) (siendo T temperatura y T'(x) su derivada), en los puntos x=5.5 y x=7.5; sabiendo que el coeficiente de difusión de calor es D=0.15 m2 /s, empleando para ello una función interpoladora que tome como soporte los puntos situados en las posiciones {5,7,10}.**

El polinomio interpolador será:

T(x) = f1 L1(x) + f2 L2(x) + f3 L3(x)

$$L1(x) = \frac{(x - x2)(x - x3)}{(x1 - x2)(x1 - x3)} = \frac{(x - 7)(x - 10)}{(5-7)(5-10)} = \frac{x^2 - 17x + 70}{10}$$

$$L2(x) = \frac{(x - x1)(x - x3)}{(x2 - x1)(x2 - x3)} = \frac{(x - 5)(x - 10)}{(7-5)(7-10)} = \frac{x^2 - 15x + 50}{-6}$$

$$L3(x) = \frac{(x - x1)(x - x2)}{(x3 - x1)(x3 - x2)} = \frac{(x - 5)(x - 7)}{(10-5)(10-7)} = \frac{x^2 - 12x + 35}{15}$$

$$T(x) = 300*\frac{x^2 - 17x + 70}{10} + 294*\frac{x^2 - 15x + 50}{-6} + 225\frac{x^2 - 12x + 35}{15}$$

T'(x)= 60x-510-48x+735+30x-180 = -8x + 45

- Sustituimos x por 5,5:

  T'(x)= -8*(5,5)+45= 1

  Como Φ=-D.T'(x); Φ= -0,15*1= -0,15

  Habrá un flujo calorífico de -0,15 para 5,5 metros de distancia.

- Sustituimos x por 7,5:

  T'(x)= -8*(7,5)+45= -15

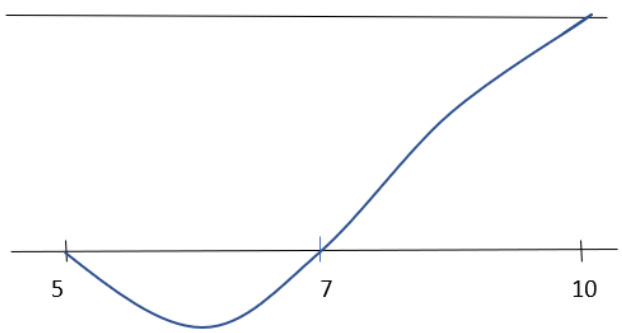
  Como Φ=-D.T'(x); Φ= -0,15*-15= 2,25

  Habrá un flujo calorífico de 2,25 para 7,5 metros de distancia.

b) **Obtener, y representar gráficamente, la función de base asociada al punto x=10, tomando como soporte {5,7,10} en el intervalo [5,10].**

10=x3

$$L_3(x) = \frac{(x-x1)(x-x2)}{(x3-x1)(x3-x2)} = \frac{(x-5)(x-7)}{(10-5)(10-7)} = \frac{x^2-12x+35}{15} = L_3(10)$$



Ejercicio 4 (examen 2017).

Se han obtenido los siguientes datos de la temperatura a la que se evapora una sustancia química en función de la presión a la que se encuentra:

Presión (atm)	1	3	4	5	6
Temperatura (ºC)	101	121	152	205	286

a) **Obtener, empleando el método de diferencias divididas, el polinomio interpolador de la función temperatura de evaporación y emplearlo para calcular la temperatura de evaporación cuando la presión es de 3.5 atm.**

El polinomio interpolador será:

P(x)= f[x1] + f[x1, x2](x-x1) + f[x1, x2, x3](x-x1)(x-x2) + f[x1, x2, x3, x4](x-x1)(x-x2)(x-x3)

+f[x1, x2, x3, x4, x5](x-x1)(x-x2)(x-x3)(x-x4)

Creamos la tabla de diferencias divididas:

x	f(x1)	f[x1,x2]	f[x1,x2,x3]	f[x1,x2,x3,x4]	f[x1,x2,x3,x4,x5]
1	101	$\frac{121-101}{3-1} = 10$	$\frac{31-10}{4-1} = 7$	$\frac{11-7}{5-1} = 1$	$\frac{1-1}{6-1} = 0$
3	121	$\frac{152-121}{4-3} = 31$	$\frac{53-31}{5-3} = 11$	$\frac{14-11}{6-3} = 1$	
4	152	$\frac{205-152}{5-4} = 53$	$\frac{81-53}{6-4} = 14$		
5	205	$\frac{286-205}{6-5} = 81$			
6	286				

Una vez tenemos los coeficientes, podemos construir el polinomio interpolador.

P(x) = 101 + 10 (x-1) + 7 (x-1)(x-3) + 1 (x-1)(x-3)(x-4) + 0 (x-1)(x-3)(x-4)(x-5)

Sustituimos en x=3,5, para ver qué temperatura de evaporación hay a esa presión.

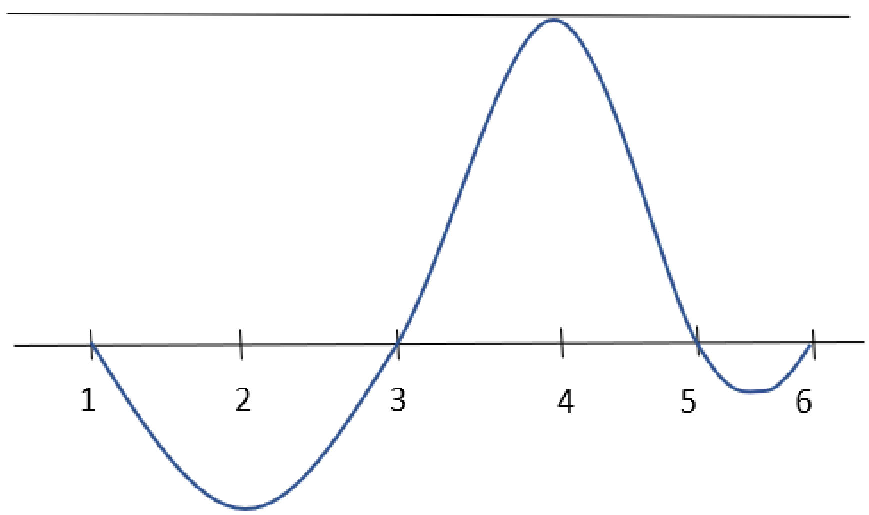
P(3,5) = 101 + 10 (3,5-1) + 7 (3,5-1)(3,5-3) + 1 (3,5-1)(3,5-3)(3,5-4) + 0 (3,5-1)(3,5-3)(3,5-4)(3,5-5) = 134,125

A esa presión habrá una temperatura de 134,135ºC

b) Obtener y representar gráficamente la función de base para una presión de 4 atmósferas.

4=x3

L3(x) = $\frac{(x-x1)(x-x2)(x-x4)(x-x5)}{(x3-x1)(x3-x2)(x3-x4)(x3-x5)} = \frac{(x-1)(x-3)(x-5)(x-6)}{(4-1)(4-3)(4-5)(4-6)} = \frac{(x-1)(x-3)(x-5)(x-6}{6}$



c) Obtener el valor interpolado para una presión de 3.5 atm y para una presión de 5.75 atm empleando para ello una función polinómica constituida por un polinomio de grado 3 en el intervalo [1, 5] y otro de grado 1 en el intervalo [5,6].

Dividiremos el problema en dos apartados:

P1(x)= f[x1] + f[x1, x2](x-x1) + f[x1, x2, x3](x-x1)(x-x2) + f[x1, x2, x3, x4](x-x1)(x-x2)(x-x3)

P2(x)= f[x4]+ f[x4,x5](x-x4)

Construimos la tabla de diferencias divididas para P1(x) que en realidad ya la habíamos hecho antes:

x	f(x1)	f[x1,x2]	f[x1,x2,x3]	f[x1,x2,x3,x4]
1	101	$\frac{121-101}{3-1}$= 10	$\frac{31-10}{4-1}$= 7	$\frac{11-7}{5-1}$= 1
3	121	$\frac{152-121}{4-3}$= 31	$\frac{53-31}{5-3}$= 11	
4	152	$\frac{205-152}{5-4}$= 53		
5	205			

$P1(x)= 101 + 10 (x-1) + 7 (x-1)(x-3) + 1 (x-1)(x-3)(x-4)$

Sustituimos en x=3,5, para ver qué temperatura de evaporación hay a esa presión.

$P1(3,5)= 101 + 10 (3,5-1) + 7 (3,5-1)(3,5-3) + 1 (3,5-1)(3,5-3)(3,5-4)= 134,125$

A esa presión habrá una temperatura de 134,135ºC

Construimos la tabla de diferencias divididas para P2(x):

x	f[x4]	f[x4,x5]
5	205	$\frac{286-205}{6-5}$= 81
6	286	

$P2(x)= 205 + 81(x-5)$

Sustituimos en x=5,75, para ver qué temperatura de evaporación hay a esa presión.

$P2(5,75)= 205 + 81(5,75-5)= 265,75$

A esa presión habrá una temperatura de 265,75ºC