INTERPOLACIÓN POLINÓMICA DE LAGRANGE

Terminando ya con la parte de apuntes de teoría (ya sabemos que es lo más aburrido), el penúltimo apartado es **LA INTERPOLACIÓN POLINÓMICA DE LAGRANGE.** Esta parte incluye más teoría y va a ser un resumen algo más largo… pero prestad atención que es muy importante que lo entendáis!!

¿Qué es la interpolación?

Se trata de un método de aproximación que permite estimar el valor que toma cierta función a partir de otros valores dados. Es decir, sirve para obtener nuevos valores partiendo de otros que conocemos. Existen varios tipos, pero en este curso vemos la de **LAGRANGE** y es en la que nos vamos a centrar.

Centrándonos en Lagrange…

Si tenemos una serie de puntos (t_i)(los cuales constituyen el llamado soporte de interpolación) y unos valores (f_i), donde i varía desde 1 hasta n (i=1,…,n), la interpolación de Lagrange es construir una función P(t) que verifique que los valores que toma en t_i sean iguales a los valores de f_i: **P**($\boldsymbol{t_i}$)=$\boldsymbol{f_i}$**.**

Hay 2 **requisitos:** la función aproximada **P(x)** va a ser **polinómica** y los **exponentes** de la variable tienen que ser **número enteros.**

El **polinomio interpolador de Lagrange P(x)** es **único** y tenemos 3 métodos diferentes para calcularlo, siendo el resultado el mismo:

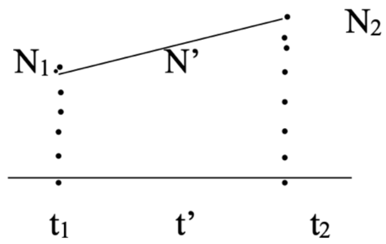
- Resolviendo el **sistema de ecuaciones** al que se llega aplicando la definición de interpolación de Lagrange.
- Empleando **polinomios de base**.
- Usando la **fórmula de Newton**, construyendo la tabla de diferencias divididas.

Según Lagrange el polinomio P(t) se puede expresar como **P(t)=**$\boldsymbol{N_1 * L_1(t) + N_2 * L_2(t) + \cdots}$, siendo $L_1(t)$ y $L_2(t)$ **polinomios de base de Lagrange.**

El **conjunto de polinomios** de **grado menor o igual que n** tiene estructura del **espacio vectoria**l de **dimensión n** y los **polinomios de base** constituyen una **base** de dicho espacio. Por tanto, cualquier **elemento** de ese conjunto se puede expresar como **combinación lineal** de unas **funciones de base**. Esto es muy útil cuando interpolamos funciones distintas sobre el mismo soporte.

Calculemos los polinomios de base de Lagrange en un ejemplo:

Consideramos el caso en que se conoce el número de bacterias que hay en dos instantes de tiempo



Siendo N_i= número de bacterias en el instante t_i

Podemos considerar una recta (polinomio de grado 1) que pase por los puntos (t_1,N_1)-(t_2,N_2). La ecuación de la recta será: r(t)=a+bt.

Habrá tantas L_i(t) como puntos haya (i).

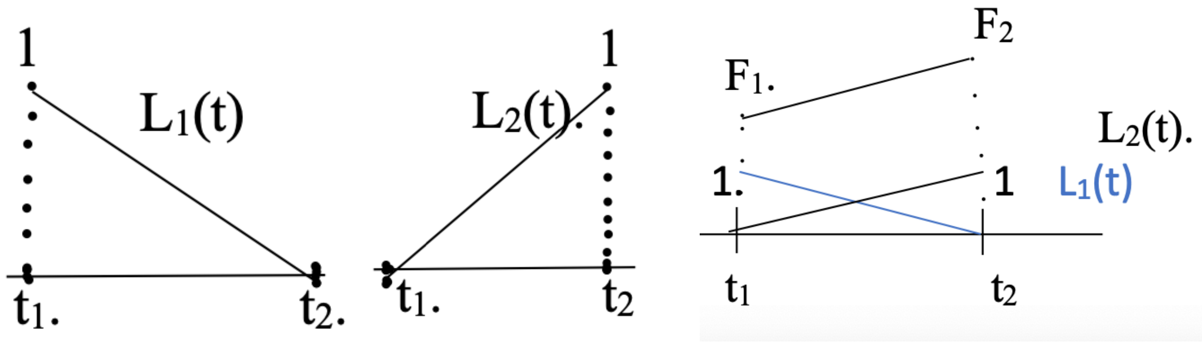
En P(t_1) se tiene que cumplir que $L_2(t_1)$=0 y $L_1(t_1)$=1. Por tanto, P(t_1)=$N_1 * L_1(t) + N_2 * L_2(t)$=$N_1$.

En P(t_2) se tiene que cumplir que $L_2(t_1)$=1 y $L_1(t_1)$=0. Por tanto, P(t_2)=$N_1 * L_1(t) + N_2 * L_2(t)$=$N_2$.

Para L_1: $L_1(t) = a_1 + b_1 * t$

$$\left.\begin{array}{l} L_1(t_1) = a_1 + b_1 * t_1 = 1 \\ L_1(t_2) = a_1 + b_1 * t_2 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} b_1 = -1/(t_2 - t_1) \\ a_1 = t_2/(t_2 - t_1) \end{array} \longrightarrow L_1(t) = \frac{t-t_2}{t_1-t_2} \quad L_2(t) = \frac{t-t_1}{t_2-t_1}$$ → P(t)=$N_1 * \frac{t-t_2}{t_1-t_2} + N_2 * \frac{t-t_1}{t_2-t_1}$

Las gráficas serán:



Si tenemos un soporte formado por 3 puntos (en nuestro ejemplo, conocemos el número de bacterias en tres instantes de tiempo), el polinomio interpolados sería de grado menor o igual que 2 y se puede obtener por cualquiera de los 3 métodos mencionados.

Obtención polinomio interpolador de Lagrange

PRIMER MÉTODO: Un polinomio de grado 2 es de la forma: $P(x) = a + bx + cx^2$. Escribimos el polinomio correspondiente a cada instante:

$$\left.\begin{array}{l} a + bt_1 + c{t_1}^2 = f_1 \\ a + bt_2 + c{t_2}^2 = f_2 \\ a + bt_3 + c{t_3}^2 = f_3 \end{array}\right\}$$

Los datos $t_1, t_2\ y\ t_3$ y $f_1, f_2\ y\ f_3$ son los conocidos. Resolviendo el sistema, se obtienen los valores de a, b y c. Sustituyendo estos valores en la expresión general de un polinomio de grado 2, se obtiene la expresión del polinomio interpolador de Lagrange.

SEGUNDO MÉTODO: Mediante polinomios de base de Lagrange.

P(t)=$N_1 * L_1(t) + N_2 * L_2(t) + N_3 * L_3(t)$

Como $L_1(t) = \frac{t-t_2}{t_1-t_2} * \frac{t-t_3}{t_1-t_3}$, $L_2(t) = \frac{t-t_1}{t_2-t_1} * \frac{t-t_3}{t_2-t_3}$ y $L_3(t) = \frac{t-t_1}{t_3-t_1} * \frac{t-t_2}{t_3-t_2}$, (mismo procedimiento seguido antes solo que con 3 puntos)

entonces: $\mathrm{P(t)} = N_1 * \frac{t-t_2}{t_1-t_2} * \frac{t-t_3}{t_1-t_3} + N_2 * \frac{t-t_1}{t_2-t_1} * \frac{t-t_3}{t_2-t_3} + N_3 * \frac{t-t_1}{t_3-t_1} * \frac{t-t_2}{t_3-t_2}$

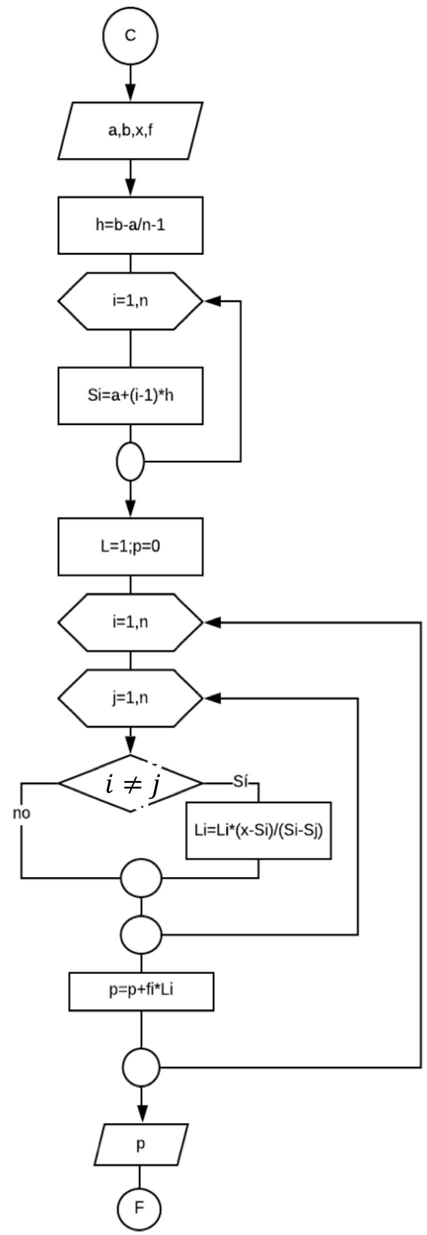
Siendo la fórmula general: $P(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i * L_i(x)$

Si tenemos n puntos, el número de polinomios de base es n. Como en nuestro ejemplo tenemos 3 puntos, tenemos también 3 polinomios de base.

Relacionemos todo esto con la **algoritmia** con el siguiente **ejercicio**: Queremos construir un algoritmo para obtener: vector L que contiene los valores de cada polinomio de base en un punto dado x y el valor que toma el polinomio interpolador en x (lo llamaremos p) Para ello los **datos** van a ser:
n⟶número de puntos que vamos a considerar
a y b⟶extremos del intervalo [a,b]
Los puntos del soporte, S, no van a ser conocidos⟶hay que calcularlos de forma equidistante.
x⟶punto en el que interpolamos
f⟶vector que contiene valores que interpolamos

En el intervalo [a,b]; generaremos los puntos S del soporte y llamamos h a la distancia que hay entre cada uno de ellos. Los valores f1, f2 ,f3,.....fn serán conocidos.
El vector L que se calcula contiene el valor que toma cada polinomio de base en el punto x.

El organigrama de este algoritmo es el siguiente:


C
a,b,x,f
h=b-a/n-1
i=1,n
Si=a+(i-1)*h
L=1;p=0
i=1,n
j=1,n
$i \neq j$
Sí
no
Li=Li*(x-Si)/(Si-Sj)
p=p+fi*Li
p
F

TERCER MÉTODO (más cómodo)

La fórmula de Newton con dos puntos es: $P(t) = f_1 + \frac{f_2 - f_1}{t_2 - t_1} * (t - t_1)$

Veamos las diferencias divididas de distintos órdenes:

-**Diferencia dividida de orden 0 de f en t1:**

f[t1]=f(t1)→por definición son iguales

-**Diferencia dividida de orden 1 de f en {t1,t2}**

$f[t1, t2] = \frac{f(t2) - f(t1)}{t2 - t1} = \frac{f[t2] - f[t1]}{t2 - t1}$ es lo mismo que:

p(t)=f[t1]+f[t1,t2]*(t-t1)

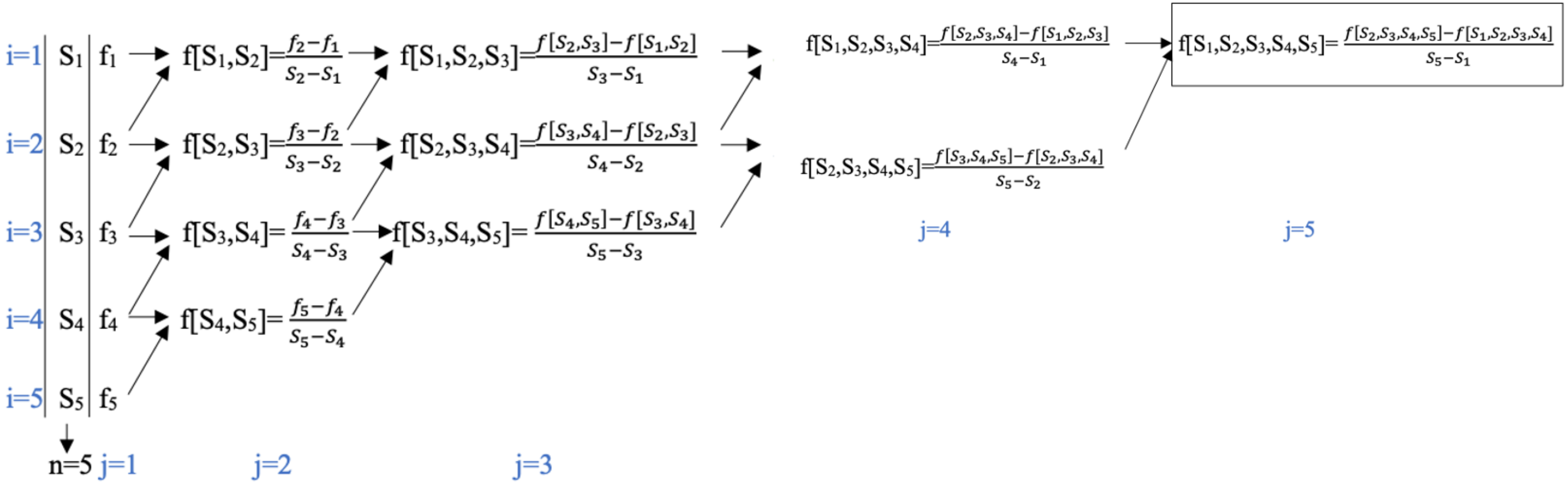
-**Diferencia dividida de orden 2 de f en {t3,t4,t5}**

$$f[t3, t4, t5] = \frac{f[t4, t5] - f[t3, t4]}{t5 - t4} = \frac{\frac{f(t5) - f(t4)}{t5 - t4} - \frac{f(t4) - f(t3)}{t4 - t3}}{t5 - t4}$$

-**Diferencia dividida de orden n de f en{ti,....,ti+n}**

$$f[ti, t_{i+1}, t_{i+2}, \dots, t_{i+n}] = \frac{f[t_{i+1}, t_{i+2}, \dots, t_{i+n}] - f[ti, \dots, t_{i+n-1}]}{t_{1+n} - t1}$$

Veámoslas más claras en forma de **tabla:**

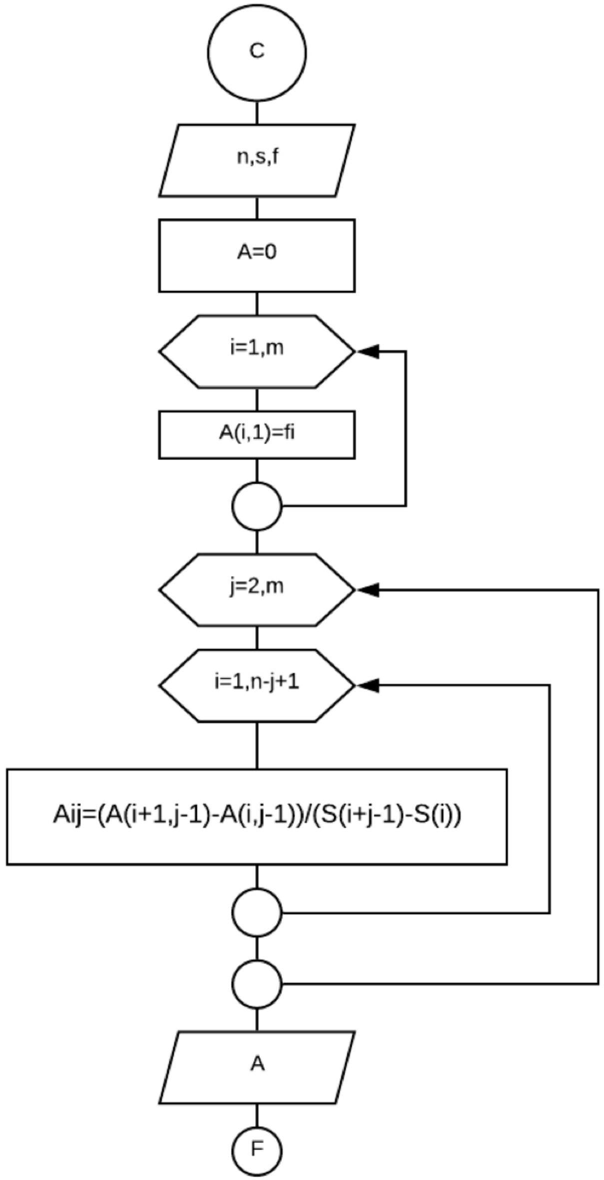


De aquí obtenemos estas fórmulas:

$A_{i,1} = f(S_i)$ siendo i=1,…,n

$A_{i,j} = \frac{A_{i+1,j-1}-A_{i,j-1}}{S_{i+j-i}-S_i}$ siendo j=2,…,n y i=1,…,n-(j-1)

Veamos ahora otro **ejercicio,** en este caso para obtener un algoritmo de la tabla de diferencias divididas. Este algoritmo parte de funciones conocidas y tenemos como datos una serie de puntos S. Vamos a obtener una matriz A. Las filas varían de 1 hasta n-j+1.


C
n,s,f
A=0
i=1,m
A(i,1)=fi
j=2,m
i=1,n-j+1
Aij=(A(i+1,j-1)-A(i,j-1))/(S(i+j-1)-S(i))
A
F

Cuando tenemos dos puntos y conocemos una función, la ecuación sería:

$$p(x)=f1+\frac{f_2-f_1}{S_2-S_1}*(x-S_1)$$

$f[S_1]$ diferencia dividida. También es llamada $f[S_1,S_2]$

Entonces esta ecuación quedaría: $P(x) = f[S_1] + f[S_1, S_2] * (x - S_1)$. Añadiendo más punto se obtiene una expresión generalizada:

$$p(x)= \overset{i=1.}{f[S_1]}+\overset{i=2.}{f[S_1,S_2]*(x-S_1)}+ \overset{i=3.}{f[S_1,S_2,S_3]*(x-S_1)*(x-S_2)}+ \overset{i=4}{f[S_1,S_2,S_3,S_4]*(x-S_1)*(x-S_2)*(x-S_3)}+\ldots+\underset{i=i.}{f[S_1,S_2,\ldots,S_i]*(x-S_1)*(x-S_2)*\ldots*(x-S_{i-1})}+ \underset{i=n}{f[S_1,S_2,\ldots,S_n]*(x-S_1)*(x-S_2)*\ldots*(x-S_{n-1})}$$

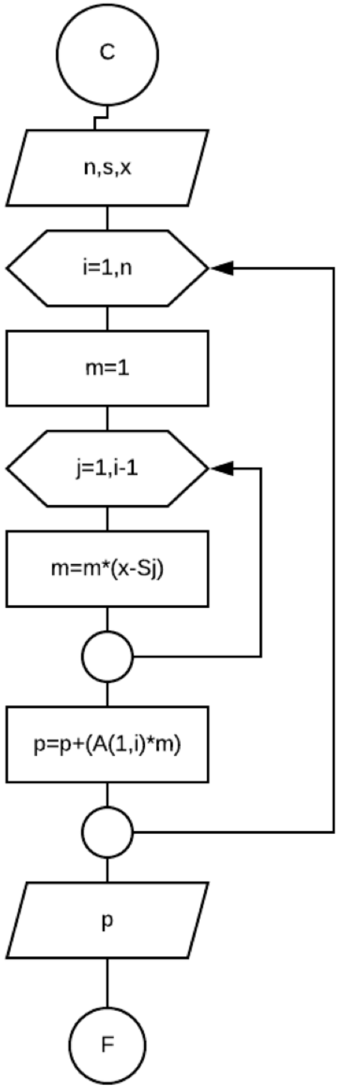
La **fórmula de Newton** para obtener el polinomio interpolador de Lagrange es:

$$p(x)=\sum_{i=1}^{n}(f[S_1,S_2,\ldots,S_i] * \prod_{j=1}^{i-1}(x-S_j)).$$

En esta fórmula, en el primer término, j va desde 0 hasta 1. Cuando hacemos un bucle y en el caso en el que i=1(primer término), j va desde 1 hasta 0. A veces, el bucle no se puede hacer y se salta. Si nos molesta a veces el primer valor se saca fuera, quedando la Fórmula de Newton como:

$$p(x)=f[S_1]+ \sum_{i=2}^{n}(f[S_2,\ldots,S_i] * \prod_{j=1}^{i-1}(x-S_j))$$

Por último, veamos otro **ejercicio** en el que tenemos que realizar un algoritmo de la fórmula de Newton mediante la tabla de diferencias divididas.


C
n,s,x
i=1,n
m=1
j=1,i-1
m=m*(x-Sj)
p=p+(A(1,i)*m)
p
F

La interpolación de Lagrange también puede ser a trozos, pero se hace exactamente igual que la normal, sirviendo los mismos tres métodos para obtener el polinomio interpolador.