INTERPOLACIÓN DE HERMITE

La interpolación de Hermite es muy parecida a la interpolación de Lagrange. Consiste en aproximar una función F(x) de la cual conocemos unos puntos (x_1, x_2, x_3..) los valores que toman en la función F(x) (f_1, f_2 , f_3..) y además conocemos la derivada de alguno de esos puntos dados. De tal forma que obtenemos otra función P(x) cuyo grado es la resta del **nº de condiciones que nos proporcionan menos uno**

Veamos varios ejercicios:

1.Conocidos f (3) =10 y f' (3)=1.Determinar el polinomio interpolado y el valor en P(4)

Como nos dan dos condiciones, entonces el polinomio interpolador (P(x)) tiene que ser de grado igual o menor que 1:

P(x)=a+bx

Sustituimos x=3 en la función

P (3) =10 $\Rightarrow$ 10=a+3b

Sustituimos el valor de la derivada en x=3, hallando la derivada del polinomio

P'(x)=+b $\Rightarrow$ P' (3) =1 $\Rightarrow$ **1=b**

$$\left.\begin{array}{l} 10=a+3b \\ 1=b \end{array}\right\} \quad 10=a+3 \Rightarrow \mathbf{a=7}$$

Sustituimos a y b en P(x) y el polinomio interpolador tendría este aspecto:

P(x)=7+x

Sustituimos x=4 para determinar su valor en el polinomio

P (4)=7+4=11

2.Obtener el polinomio interpolador que verifica estas condiciones:

1.f(1)=3 , f'(2)=0 , f(3)=3

2.f(1)=3 ,f'(2)=0, f(3)=1

1) Como tenemos tres condiciones, el polinomio será de grado 2 o menor:

$P(x)=a+bx+cx^2$

$P(1)=3 \Rightarrow 3=a+b+c \qquad P(3)=3 \Rightarrow 3=a+3b+9c$

$P'(x)=b+2cx$

$P'(2)=0 \Rightarrow 0=b+4c$

$$\left.\begin{array}{l} 3=a+b+c \\ 3=a+3b+9c \\ 0=b+4c \end{array}\right] \quad -3F1+F2 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -9=-3a-3b-3c \\ 3=a+3b+9c \end{array}\right] \quad -6=-2a+6c \ F_4$$

$$-F1+F3 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -3=-a-b-c \\ 0=b+4c \end{array}\right] \quad -3=-a+3c \ F_5 \qquad \mathbf{F4\text{-}2F5} \Rightarrow$$

$-6=-2a+6c$

$6=2a-6c$

$0=0$

Hay infinitas soluciones por lo que le damos a “a “cualquier valor y hallamos “b” y “c”

Si $a=1$ $\Rightarrow$ $b=8/3$ y $c=-2/3$

$P(x)=1+8/3x+-2/3x^2$

Si $a=2$ $\Rightarrow$ $b=4/3$ y $c=-1/3$

$P(x)=2+4/3x-1/3x^2$

Vemos que obtenemos diferentes polinomios dependiendo del valor que le demos a “a”. Sin embargo, ambos cumplen las condiciones dadas, por lo que la solución es infinitos polinomios

2) $P(x)=a+bx+cx^2$

$P(1)=3$ $\Rightarrow$ $3=a+b+c$ $P(3)=1$ $\Rightarrow$ $1=a+3b+9c$

$P'(x)=b+2cx$

$P'(2)=0$ $\Rightarrow$ $0=b+4c$

$3=a+b+c$

$1=a+3b+9c$

$0=b+4c$

$-3F1+F2$ $\Rightarrow$

$-9=-3a-3b-3c$

$1=a+3b+9c$

$-8=-2a+6c$ F4

$-F1+F3$ $\Rightarrow$

$-3=-a-b-c$

$0=b+4c$

$-3=-a+3c$ F5

$$F4-2F5 \rightarrow \left.\begin{array}{r} -8=-2a+6c \\ 6=+2a-6c \end{array}\right\} \rightarrow -2\neq 0 \quad \text{sin solución}$$

Como no existe solución, no hay ningún polinomio que cumpla dichas condiciones.