Interpolación de Lagrange

Para estimar un valor f_x en función del resto de valores conocidos.
Se crea un polinomio g(x) tal que $g(x_i)= f_i$ variando i de 1 hasta n.

Existen 3 métodos:

→ 1er método:
Definición de interpolación de Lagrange (sistema de ecuaciones).
Conociendo una serie de valores de *x* y sus respectivas *f(x)*; $P(x_{1)}=f_1$, $P(x_{2)}=f_2$, $P(x_{3)}=f_3$, $P(x_n)=f_n$,y como $P(x)=a+bx+cx^2+dx^3+\ldots+nx^{n-1}$ donde *n* va en función del grado del polinomio interpolador, quedaría resolver el sistema de ecuaciones para obtener a, b, c, d, etc.

→ 2º método:
Consiste en aplicar la fórmula de Newton.
En la cual, el polinomio interpolador viene dado por:

$$P(x)= f(x)+ f[S_1, S_2] *(x-x_1) + f[S_1, S_2,S_3] *(x-x_1) *(x-x_2)\ldots$$

siendo $f[x_1,x_2]$... las diferencias divididas:

x	f(x)	Primera Diferencia	Segunda Diferencia	Tercera Diferencia
x_0	$f(x_0)=b_0$	$f[x_1,x_0]=b_1=\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$	$f[x_2,x_1,x_0]=b_2=\dfrac{f[x_2,x_1]-f[x_1,x_0]}{x_2-x_0}$	$f[x_3,x_2,x_1,x_0]=b_3$ $b_3=\dfrac{f[x_3,x_2,x_1]-f[x_2,x_1,x_0]}{x_3-x_0}$
x_1	$f(x_1)$	$f[x_2,x_1]=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$	$f[x_3,x_2,x_1]=\dfrac{f[x_3,x_2]-f[x_2,x_1]}{x_3-x_1}$	
x_2	$f(x_2)$	$f[x_3,x_2]=\dfrac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$		
x_3	$f(x_3)$			

Este método se puede llevar a cabo mediante la expresión:

$$P(x)= f_1+ \sum (f[S_1, S_2,S_3, S_i] * \prod (x-S_j))$$

con i variando desde 1 hasta n y j desde 1 hasta i-1, y donde $f[S_1, S_2, S_3, S_i]$ son las diferencias divididas, calculadas mediante una matriz:

$$A_{i,j}= (A_{i+1,j-1} - A_{i,j-1})/(S_{i+j-1} - S_i)$$

donde i va desde 1 hasta n-j+1 y j desde 2 hasta n.

→ 3er método:

<u>Mediante los polinomios de base de Lagrange.</u>

En ese caso el polinomio interpolador es:

$$P(x)= f_1*L_1(x)+ f_2*L_2(x)+ f_3*L_3(x)+ f_n*L_n(x)$$

siendo los polinomios de base de la forma

$$L_i(x)= \prod (x-S_j)/(S_i-S_j)$$

donde Π es el productorio, j varía desde 1 hasta n e i igual, pero i tiene que ser distinta de j, ydonde los valores de la recta soporte $(S_1, S_2, S_3,...S_n)$. Todo esto se puede resumir en que el polinomio es

$$P(x)= \sum f_i *L_i(x)$$

donde i varía desde 1 hasta n.

Ejemplo Ilustrativo

Dados los puntos f1= (0,15), f2=(2,25) y 3=(5,12) crear un polinomio interpolador para obtener el valor en x=3. Aplicando los 3 métodos.

Primer método:
<u>Definición de interpolación de Lagrange (sistema de ecuaciones).</u>

Al tener 3 puntos se emplea un polinomio de grado 3, $p(x)=a+bx+bx^2$.
Este polinomio debe verificar que p(0)=15, p(2)=25 y p(5)=12, por tanto:
$p(0)=a+b0+b0^2=15$ despejando queda que a=15
$p(2)=a+b2+b2^2=25$; como a= 15, 2b+4c=10, despejando b, b=(10-4c)/2
$p(5)=a+b5+b5^2=12$; como a=15 y b=(10-4c)/2, 5((10-4c)/2)+25c=-3, despejando queda que c= -28/15
Sabiendo c, se resuelve b, b=131/15
Una vez conocidos a,b,c el polinomio interpolador queda como $p(x)= 15+(131/15)x-(28/15)x^2$ y para x=3, $p(3)= 15+(131/15)3-(28/15)3^2= 122/15$

Segundo método:

Fórmula de Newton.

Al tener 3 puntos se emplea un polinomio de grado 3,

p(x)=F(x1)+F(x1,x2)*(x-x1)+F(x1,x2,x3)*(x-x1)*(x-x2).

Primero hay que hacer la tabla de diferencias divididas.

x1=0	15	(25-15)/(2-0)=5	(-4,33-4)/(5-0)= -1,86666
x2=2	25	(12-25)/(5-2)= -4,33	
x3=5	12		

Una vez hecha la tabla, el polinomio es p(x)= 15+5*(x-0)-(28/15)*(x-0)*(x-2) y para x=3,

p(3)=15+15-(28/15)*3=122/15

Tercer método:

Polinomio de base de Lagrange.

Al tener 3 puntos se emplea un polinomio de grado 3, p(x)=F(x1)*L_1(x)+F(x2)*L_2(x)+F(x3)*L_3(x)

L_1=((x-2)*(x-5))/((0-2)*(0-5))= (x-2)*(x-5)/10

L_2=((x-0)*(x-5))/((2-0)*(2-5))= x*(x-5)/-6

L_3=((x-0)*(x-2))/((5-0)*(5-2))= x*(x-2)/15

Cuando se han calculado los L y conocidos los F, el polinomio es

p(x)=15*((x-2)*(x-5)/10)+25*(x*(x-5)/-6)+12*(x*(x-2)/15), y para x=3

p(x)=15*((3-2)*(3-5)/10)+25*(3*(3-5)/-6)+12*(3*(3-2)/15)= 122/15