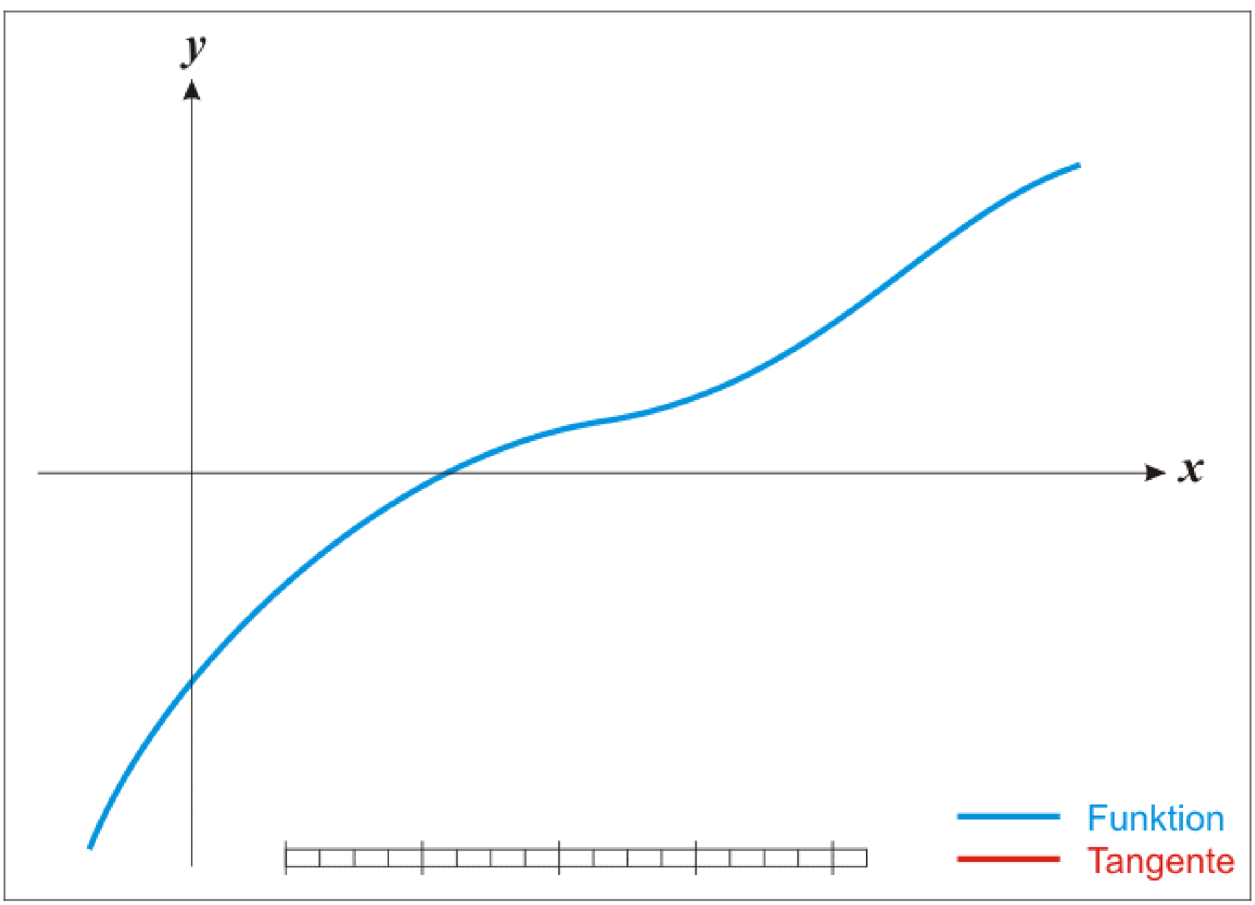
Método de Aproximación Newton-Raphson

La aproximación Newton Raphson es una forma de calcular las raíces de una función de forma aproximada utilizando la recta tangente a la curva (derivada de la función).

También se conoce como el método de Newton-Fourier, y hay instancias en las que no es válido por la naturaleza de la función que queremos aproximar. Aún así, se usa de forma habitual porque es rápido, bastante preciso en la mayoría de los casos y no se requiere demasiada memoria de ordenador para ejecutar el algoritmo. Si el resultado con un número bajo de iteraciones no es satisfactorio, se emplean otros métodos más lentos pero seguros, como el método de la bisectriz.

Se trata de un método iterativo que sirve para resolver ecuaciones no lineales (encontrar valor de la incógnita que haga que la función valga cero *(f(x)=0)*, es decir, que corte al eje de abscisas). Es una aproximación del método de la secante, teniendo en cuenta que si trazamos una secante a la curva con puntos que están infinitesimalmente próximos, podemos sustituirla por la tangente a la curva en ese punto (la derivada).

Buscamos linealizar la función: sustituirla por una recta que contenga un punto correspondiente al valor de la función en el punto elegido *(x0, f(x0))* y cuya pendiente sea la derivada en dicho punto *(f'(x0)).* La aproximación de la raíz de la función es la intersección entre la recta obtenida y el eje de abscisas. Se puede repetir este proceso tantas veces como sea necesario, tomando la raíz aproximada como punto de partida en cada nueva iteración.

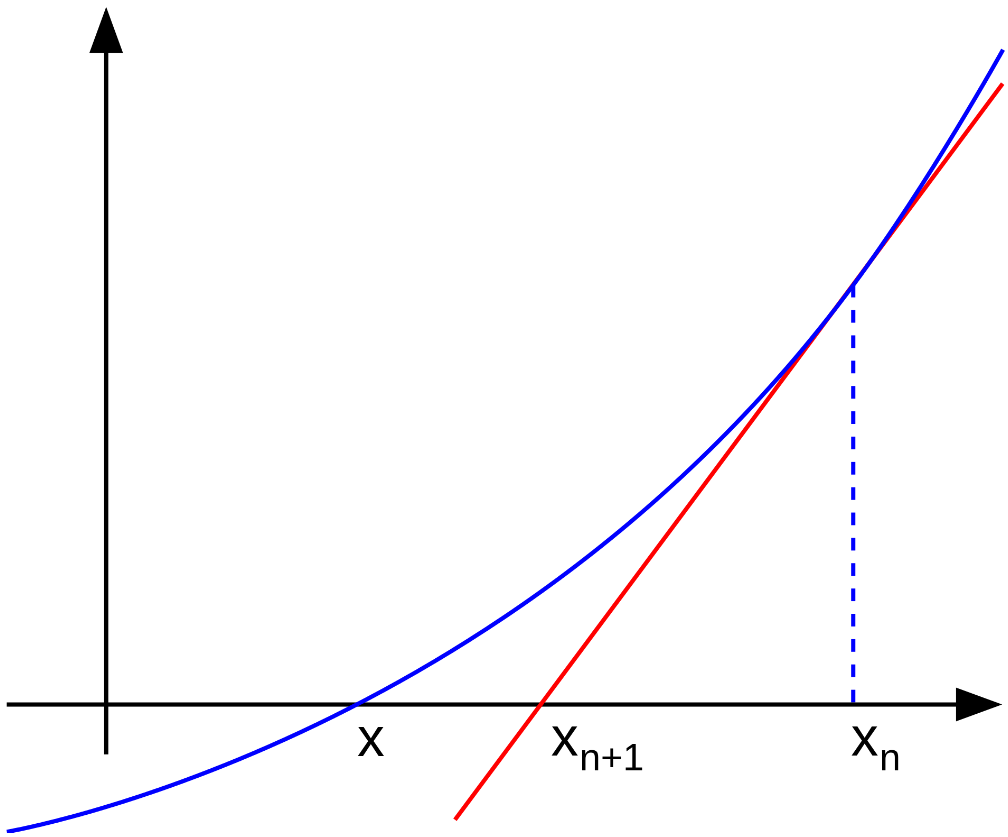


(haz click aquí para ver una animación del proceso)

!! OJO: si f'(xn)=0 → non podemos aplicar este método, puesto que sería una recta horizontal y no cortaría al eje de abscisas

Fórmula de Newton-Raphson

Existe una fórmula para calcular las sucesivas aproximaciones de las raíces con el método de Newton-Raphson.



f'(xn)
f(x)

Como la derivada es la pendiente de la tangente, tomamos

$$f'(x_n) = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Sustituyendo los incrementos por sus valores correspondientes, nos queda

$$f'(x_n) = \frac{f(x_n) - 0}{x_n - x_{n+1}} \Rightarrow f'(x_n) \cdot (x_n - x_{n+1}) = f(x_n) \Rightarrow x_n - x_{n+1} = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \Rightarrow$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Cota de error

La cota de error viene determinada por la siguiente expresión:

$$\left|x_n - x^*\right| \leq \varepsilon$$

Siendo:

x^* = el valor real de la raíz
ε = un valor que elegimos nosotros
x_n = valor aproximado
d = término en valor absoluto

Algoritmo

Plantea un algoritmo que permita resolver f(x)=0 mediante el método de Newton-Raphson, eligiendo un valor inicial (x_n), el valor de la cota de error (ε) y el número máximo de iteraciones permitidas (maxiter).

Para comprobar que la solución es válida, la diferencia entre el valor real y el aproximado de la raíz debe ser menor o igual a la cota de error. Podemos comprobar esto mediante la siguiente fórmula:

$$\left|x_n - x_{n+1}\right| \leq \varepsilon$$

Simplificando, $d \leq \varepsilon$

Para realizar el algoritmo pedido necesitamos utilizar un bucle condicional.

Además, al principio tendremos que iniciar la variable *d* a un valor mayor que el de ε para que se cumpla la condición del bucle y pueda comenzar (después se irá cambiando).

También vamos a crear una variable *n* que actúe como contador del número de iteraciones, para compararlo con *maxiter* y que el bucle se pare cuando supere el máximo.

Como se deben cumplir las dos condiciones para que se realice el bucle, solo funcionará si el valor de *d* es mayor que la cota de error permitida **Y** no se ha sobrepasado el número máximo de iteraciones. Entonces, si el bucle se para porque han ocurrido demasiadas iteraciones, el error de aproximación será demasiado grande, y en ese caso el método Newton-Raphson no sería adecuado para aproximar la función dada.

Planteamos el algoritmo:

Inicio

Dado x_n , ε, f(x), df, maxiter → df=f'(x)

n=1; d=2*ε

Mientras (d>ε & n<=maxiter)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$d = \left|x_n - x_{n+1}\right|$$

n=n+1 ⟶ hay que modificar las variables de las que depende la condición del bucle para ir avanzando y que termine cuando se cumplan

Fin bucle

Escribir x o x_n

!! Ten en cuenta

- Si el resultado lo escribimos como un vector, se pueden representar después gráficamente para ver el error.
- Es importante el orden en el que se realizan las operaciones en el bucle, ya que si aumentásemos primero la *n,* el valor de *d* se vería modificado también y no correspondería a la operación realizada previamente (sería incorrecto)
- Si expresamos *d* como un vector, también podemos representarla gráficamente.
- Para que el método funcione debemos expresar la función que queremos aproximar como *f(x)=0.*

*gráficas tomadas de [wikipedia]