Interpolación de Hermite

La interpolación de Hermite es un método de interpolación que se utiliza cuando tenemos datos relacionados con distintos puntos y también sus derivadas sucesivas. Se basa en la definición de interpolación: obtener una función polinómica de grado n que nos sirva para determinar valores aproximados de un número de puntos dados. Esta función nos debe aportar los valores de los puntos dados con la mayor exactitud posible. Para ello es necesario el uso de un polinomio interpolador de la forma:

$$p(x)=a+bx+cx^2+dx^3+ex^4+\dots$$

cuyos coeficientes podemos conseguir igualando p(x) a f(x) y resolviendo el sistema obtenido. (Consideramos f(x) los valores que corresponden a los puntos dados).

El número de incógnitas o coeficientes del sistema será igual al número de condiciones conocidas menos 1. Por ejemplo, si conocemos el valor de la función en 3 puntos, el polinomio interpolador será de segundo grado.

grado polinomio interpolador: nº condiciones -1

Sin embargo, no siempre conocemos el valor de la función en los puntos dados. Puede que en su lugar conozcamos el valor de la primera, segunda, tercera o enésima derivada. En este caso, es necesario aplicar la interpolación de Hermite.

Recordando la definición, planteamos una nueva igualdad, esta vez teniendo en cuenta que las sucesivas derivadas de f(x) son iguales a las sucesivas derivadas de p(x). De esta forma, obtenemos ecuaciones con un número de incógnitas que disminuyen según aumenta el grado de las derivadas sucesivas. Si planteamos de nuevo el sistema y lo resolvemos, obtendremos el polinomio interpolador para los datos proporcionados.
Es decir:

$$p'(x)=f'(x)=b+2cx+3dx^2+4ex^3+\dots$$
$$p''(x)=f''(x)=2c+6dx+12ex^2+\dots$$
$$p'''(x)=f'''(x)=6d+24ex+\dots$$

Siendo a, b, c, d, e… las incógnitas del polinomio interpolador, respectivamente.

OJO!! Es importante no confundirse al derivar, y tener en cuenta que

1) No siempre te darán las derivadas en orden (te pueden dar un punto, una derivada segunda y una cuarta, por ejemplo)
2) Te pueden dar el valor de la función en un punto y la derivada de la función en ese mismo punto (como en el ejercicio del examen, explicado aquí)
   En este caso, habría que plantear una ecuación separada para cada condición.
3) Si el sistema es compatible indeterminado, no podemos definir un polinomio interpolador *único*, ya que existen infinitas soluciones que lo verifican.

Ejemplo Ilustrativo

Dados los valores f(0)=3, f''(0)=2 y f(1)=2, halle el polinomio interpolador mediante el método de Hermite. Después, calcula el valor interpolado de x=0,25.

Primero planteamos el polinomio interpolador p(x) de forma genérica. Como el enunciado nos da 3 condiciones, será de grado 2.

$$p(x)=a+bx+cx^2$$

Ahora igualamos f(x) a p(x) (o sus sucesiva derivadas) para los valores dados, sustituyendo x por el valor del punto correspondiente:

$f(0) = p(0) = a+b0+c0^2 = 3 \longrightarrow a=3$
$f(1) = p(1) = a+b1+c1^2 = 2 \longrightarrow a+b+c=2 \longrightarrow 3+b+1=2 \longrightarrow b= -2$
$f''(0) = p''(0) = 2c = 2 \longrightarrow c=1$

cuidado!! f''(x)=2c, no hay que sustituir 'x' en este caso porque 'x' desaparece al derivar

Una vez tenemos las soluciones del sistema, escribimos el polinomio interpolador y calculamos el valor aproximado que nos pide el enunciado.

$p(x) = 3-2x+x^2$
$p(0,25) = 3-2*0,25+0,25^2 = 2,56 \longrightarrow$ SOLUCIÓN