Resumen Integración Numérica.

En este recurso se va a explicar en modo de resumen como hacer los ejercicios de integración numérica.

Lo primero que se debe tener en cuenta es que las cuatro fórmulas que se van a explicar son de tipo interpolatorio, lo que nos va a permitir igualar la integral que queremos averiguar a la integral del polinomio interpolador, el cual por comodidad se sacará a través de las fórmulas de Newton. $f(x) \approx p(x) \rightarrow \int_a^b f(x) \cdot dx \approx \int_a^b p(x) \cdot dx$

Este método sirve para aproximar integrales. Esto puede ser útil ya que puede que la función obtenida sea muy difícil de integrar.

Para estos ejercicios se van a utilizar 4 fórmulas que nos van a permitir aproximar la integral.

1. Fórmula del rectángulo.

Esta fórmula se puede utilizar cuando conozcamos un punto de la función cuya integral queremos aproximar.

$$\int_a^b f(x) \cdot dx \approx f(a) \cdot (b-a)$$

Con esto se aproxima la integral a través del área de un rectángulo entre los puntos a y b.

2. Fórmula del trapecio.

Esta fórmula se va a poder utilizar cuando se conocen dos puntos de la función que estamos integrando.

$$\int_a^b f(x) \cdot dx \approx \frac{f(a) - f(b)}{2}(b-a)$$

Esta fórmula puede dar una aproximación exacta si el polinomio es de grado ≤ a 1.

3. Fórmula de Simpson.

Para poder aplicar esta fórmula se tienen que conocer los valores en la función de tres puntos; a, b y el punto medio entre a y b ($\frac{b-a}{2}$)

$$\int_a^b f(x) \cdot dx \approx \frac{b-a}{6}(f(a) + 4 \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)$$

4. Fórmula del Punto Medio.

Para poder utilizar esta fórmula tan solo es necesario conocer el valor de la función en el punto medio de los puntos entre los que se va a integrar.

$$\int_a^b f(x) \cdot dx \approx f\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot (b-a)$$

En el caso de que el polinomio que se esté integrando sea de grado ≤1, la fórmula del punto medio y la fórmula del trapecio darán el mismo resultado.

Una vez conocemos las fórmulas que podemos aplicar, se puede realizar un ejercicio.

Ejercicio.

Con el soporte {-h, 0, h} y los valores conocidos {f(-h), f(0), f(h)}

Obtener una fórmula de integración numérica de tipo interpolatorio.

Resolución: Como se trata de una integración numérica de tipo interpolatorio, igualamos la integral $\int_a^b f(x) \cdot dx$ a la integral del polinomio interpolador. Nuestro polinomio interpolador será: f(-h) + f[-h,0] ·(x+h) + f[-h, 0, h] · (x+h)·(x-0), por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\int_{-h}^{h} f(x) \cdot dx = \int_{-h}^{h} p(x) \cdot dx \\
&= f(-h) \cdot \int_{-h}^{h} dx + \mathrm{f}[-\mathrm{h}, 0] \\
&\cdot \int_{-h}^{h} (x+h) \cdot dx + f[-h,0,h] \cdot \int_{-h}^{h} (x+h) \cdot (x) \cdot dx \\
&= f(-h) \cdot 2h + f[-h,0](\frac{x^2}{2} + hx)_{-h}^{h} + f[-h,0,h](\frac{x^3}{3} + h\frac{x^2}{2})_{-h}^{h} \\
&= f(-h) \cdot 2h + f[-h,0](2h \cdot h) + f[-h,0,h] \cdot \left(\frac{h^3}{3} - \frac{(-h)^3}{2}\right) \\
&= 2h \cdot f(-h) + \frac{f(0) - f(-h)}{h} \cdot (2h^2) + \frac{f(h) - 2f(0) + f(-h)}{2h^2}\left(\frac{2h^3}{3}\right)
\end{aligned}$$

Una vez se llega realizando sumas y restas se obtiene:

$$\int_{-h}^{h} f(x) \cdot dx = \frac{h}{3}[f(-h) + 4(f(0) + f(h)] = \frac{2h}{6}[f(-h) + 4(f(0) + f(h)]$$

Esta fórmula obtenida es igual a la fórmula de Simpson, por lo que ya hemos obtenido una fórmula de integración numérica de tipo interpolatorio.