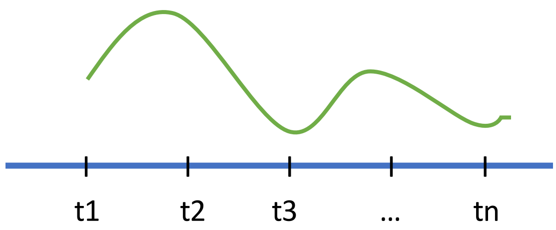
INTERPOLACIÓN DE LAGRANGE

Antes de empezar… ¿Qué es? ¿Para qué se utiliza? ¿Quién lo inventó?

La interpolación es un método de aproximación por el cual se consigue estimar el valor de una función en un punto a partir de otros valores dados (puntos de soporte y sus valores), Particularizamos en un caso concreto en el cual tenemos representado la variación del número de bacterias respecto al tiempo, con puntos de soporte (t1, t2,…, tn) que en este caso serán los tiempos; y valores, que en este caso será la cantidad de bacterias en un tiempo concreto (n1, n2, …, nt).



A partir de la función dada anteriormente, se puede estimar cualquier valor que se encuentre dentro de un intervalo (p.ej. [t1,t2]) La interpolación que se aprende en la asignatura de Programación es la conocida como Interpolación de Lagrange, creada por el físico, matemático y astrónomo Giuseppe Lodovico Lagrangia. Este método para obtener estimaciones a partir de valores conocidos es muy útil en el campo científico, más específicamente, es aplicado al **cálculo científico**.

INTERPOLACIÓN POLINÓMICA DE LAGRANGE: REQUISITOS

- La base de la interpolación son las funciones polinómicas cuya forma son: $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$. El grado del polinomio será una unidad menor que el número de puntos de soporte dado.
- Los exponentes de la variable deben ser números enteros.

MÉTODOS PARA OBTENER LA FUNCIÓN INTERPOLADORA

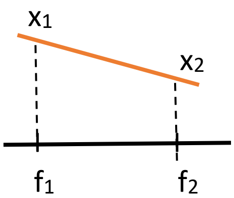
1. ***Resolviendo el sistema de ecuaciones al que se llega aplicando la definición de interpolación de Lagrange.***
2. ***Empleando polinomios de base.***
3. ***Fórmula de Newton, construyendo la tabla de diferencias divididas.***

SISTEMA DE ECUACIONES

En este método se aplicará la **definición de polinomio**, dependiendo del grado con el que se esté trabajando. Para entenderlo, lo aplicaremos a un polinomio sencillo de primer grado, a un ejemplo concreto, y después, deduciremos la forma general.

Este método se basa en obtener un **sistema de ecuaciones**, de grado igual al número de puntos de soporte, que se resolverá matemáticamente y por el cual se obtienen los coeficientes de los polinomios que componen el sistema

Dada una función con puntos de soporte [x_1,x_2] y valores [f_1,f_2]; obtener el valor interpolado en $x=x_n$ siendo x_n un valor comprendido en el intervalo [x_1,x_2].



Los polinomios siguen la estructura de primer grado: P(x)=a + bx por lo que si sustituimos obtenemos un sistema sencillo de resolver:

$$\begin{cases} P(x_1)=a+b\,x_1 \\ P(x_2)=a+b\,x_2 \end{cases}$$

P(x) es único y tras resolverlo obtendremos unos valores de a y b que nos permitirán obtener cualquier otro valor.

EJEMPLO 1: ***Consideramos el número de bacterias de una muestra a lo largo del tiempo. Queremos estimar el número de bacterias en el tiempo t=6. Los puntos de soporte dados son: [4,8] y los valores correspondientes [30,150].***

Primero obtenemos el sistema de ecuaciones

$$P(4)=a+4b=30$$
$$P(8)=a+8b=150$$

Del sistema se deduce que a= -90 y b= 30 por lo que la función quedaría expresada como P(x)= -90 + 30x, entonces P(6)= -90 + 6*30 = 90 bacterias.

EJEMPLO 2: ***Consideramos el número de bacterias de una muestra a lo largo del tiempo. Queremos estimar el número de bacterias en el tiempo t=5. Los puntos de soporte dados son: [0,2,8] y los valores correspondientes [40,220,1040]***

Primero obtenemos el sistema de ecuaciones de la forma $P(x)= a + bx +cx^2$.

$$P(1)=a=40$$
$$P(2)=a+2b+4c=220$$
$$P(8)=a+8b+64c=1040$$

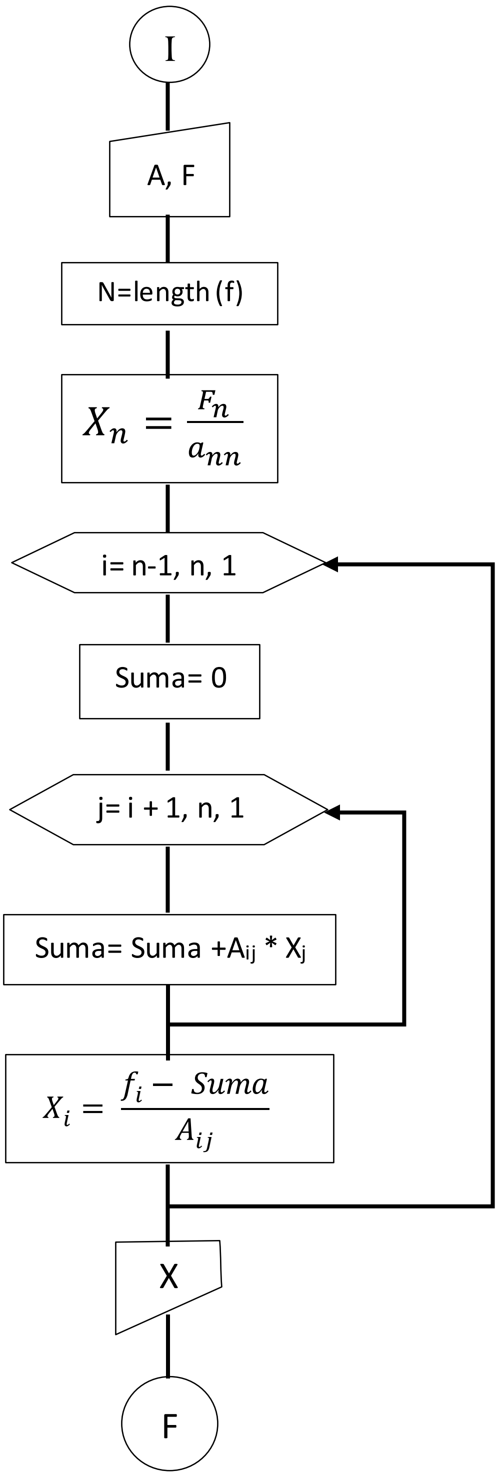
Del sistema se deduce que a=40, b=65 y c=7.5 por lo que la función quedaría expresada como $P(x)= 40 + 65x + 7.5x^2$, entonces P(5)= 40 + 65*5 +7.5*5= 552.5 bacterias

A partir de este método se pueden resolver problemas de interpolación en los que se ha llegado a sistema de ecuaciones de la forma triangular superior A · X = B

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & \cdots & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad y \quad b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Este sistema se resuelve por remonte a partir de las siguientes fórmulas y algoritmo:

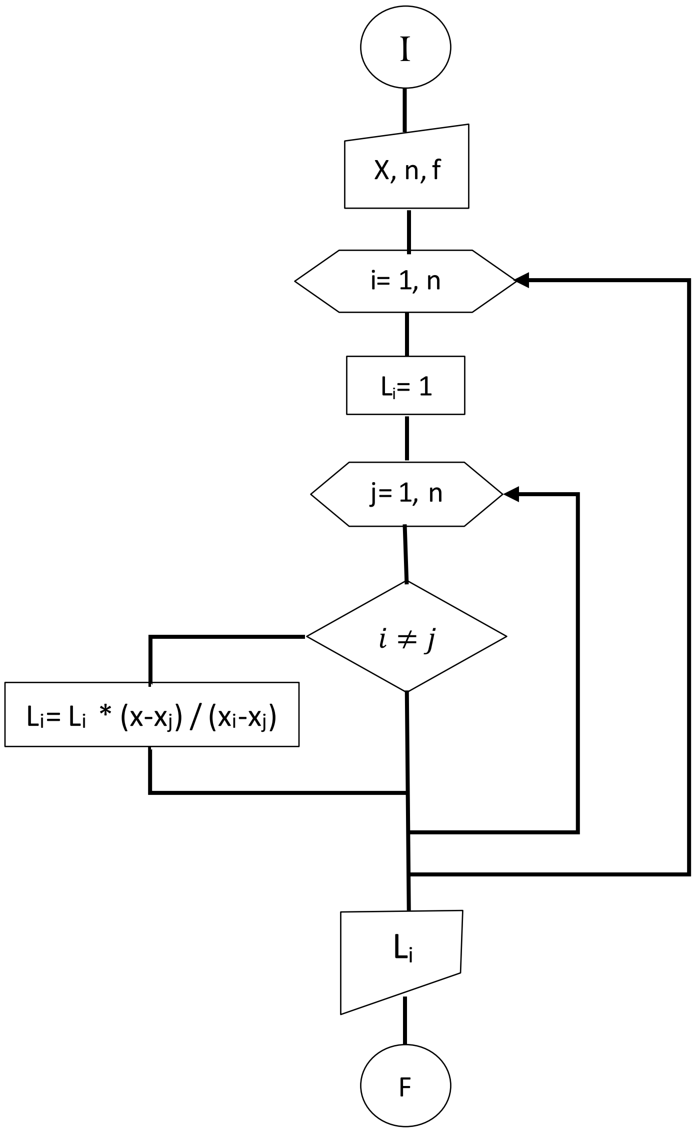
$$X_n = \frac{F_n}{a_{nn}} \qquad\qquad X_i = \frac{f_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} * x_j}{a_{ij}} \quad (i = n-1, 1, -1)$$



El método de sistema de ecuaciones se resolverá por tanto planteando la forma de los polinomios que componen el sistema, con grado igual al número de puntos dados, sustituyendo estos puntos y sus valores en la ecuación, y resolviendo para calcular los coeficientes. A partir del polinomio obtenido se podrá calcular cualquier valor interpolado.

MÉTODO DE LOS POLINOMIOS DE BASE DE LAGRANGE

Se sigue la siguiente fórmula: $P(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i * L_i(x) = f_1 * L_1(x) + f_2 * L_2(x) + \cdots + f_n * L_n(x)$ siendo $L_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} \frac{x-x_i}{x_i-x_j}$. El algoritmo de esta última fórmula es:



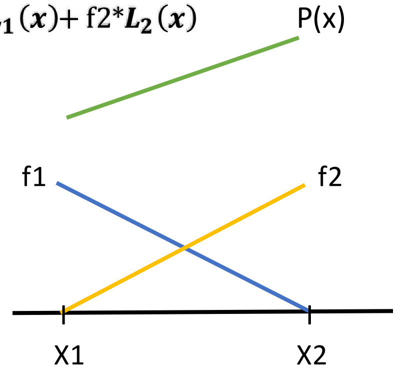
Las funciones de base $L_i(x)$ son polinomios del mismo grado que el polinomio buscado P(x). En este método el polinomio de base de Lagrange, $L_i(x)$ *es igual a*: 1 *si* $i = j$; o a 0 *si* $i \neq j$, es decir, el polinomio L_0 será 1 en x_0 y 0 en x_1.

EJEMPLO 1, GRADO=2: [x_1,x_2] y [f_1,f_2] → $P(x) = f1 * \boldsymbol{L_1}(\boldsymbol{x}) + f2 * \boldsymbol{L_2}(\boldsymbol{x})$

$$L_1(x) = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2}$$

$$L_2(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$P(x) = f1 * \frac{x-x_2}{x_1-x_2} + f2 * \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$



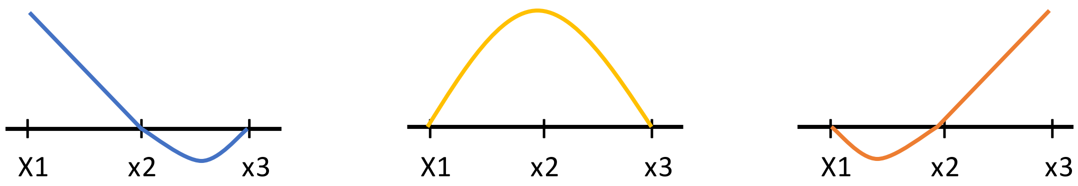
Si tenemos n puntos → el número de polinomios de base es n

Ejemplo concreto: soporte=[2,5], valores=[6,12], x=3

P(x)= 6 * $\frac{x-5}{2-5}$ + 12 * $\frac{x-2}{5-2}$ = -2 * (x – 5) + 4 * (x – 2) ;   P(3)= -2 * (-2) + 4 * 1 = 8

EJEMPLO 2, GRADO=3: [x_1,x_2, x_3] y [f_1,f_2, f_3] → P(x)= $f_1 * L_1(x) + f_2 * L_2(x) + f_3 * L_3(x)$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_2)*(x-x_3)}{(x_1-x_2)*(x_1-x_3)} \quad L_2(x) = \frac{(x-x_1)*(x-x_3)}{(x_2-x_1)*(x_2-x_3)} \quad L_3(x) = \frac{(x-x_1)*(x-x_3)}{(x_3-x_1)*(x_3-x_2)}$$



Ejemplo concreto: soporte=[2,6,9], valores=[7,15,21], x=7

P(x)= 7 * $\frac{(x-6)*(x-9)}{(2-6)*(2-9)}$ + 15 * $\frac{(x-2)*(x-9)}{(6-2)*(6-9)}$ + 21 * $\frac{(x-2)*(x-6)}{(9-2)*(9-6)}$ = 7 * $\frac{(x-6)*(x-9)}{28}$ - 15 * $\frac{(x-2)*(x-9)}{12}$ + 21 * $\frac{(x-2)*(x-6)}{21}$;   P(7)= -1/2 + 12.5 + 5 = 17

MÉTODO DE DIFERENCIAS DIVIDIDAS

Se trata del método más cómodo. El orden es determinado por el numero de puntos de soporte de forma que si tenemos n puntos de soporte, el orden será n-1.
Para un orden "i" la función de diferencias divididas quedaría de la siguiente forma:

[x_1,x_2,…,x_i,x_{i+1}] f[x_1,x_2,…,x_i,x_{i+1}]= $\frac{\text{f[x2,x3,…,xi+1]} - \text{f[x1,x2,…,xi]}}{xi+1-x1}$

Soporte	Valor	Orden 1	Orden 2	Orden 3
X_1	F_1	f[x_1,x_2]=$\frac{f2-f1}{x2-x1}$	f[x_1,x_2,x_3]=$\frac{\text{f[x2,x3]}-\text{f[x1,x2]}}{x3-x1}$	f[x_1,x_2,x_3,x_4]=$\frac{\text{f[x2,x3,x4]}-\text{f[x1,x2,x3]}}{x4-x1}$
X_2	F_2	f[x_2,x_3]=$\frac{f3-f2}{x3-x2}$	f[x_2,x_3,x_4]=$\frac{\text{f[x3,x4]}-\text{f[x2,x3]}}{x4-x3}$	
X_3	F_3	f[x_3,x_4]=$\frac{f4-f3}{x4-x3}$		
X_4	F_4			

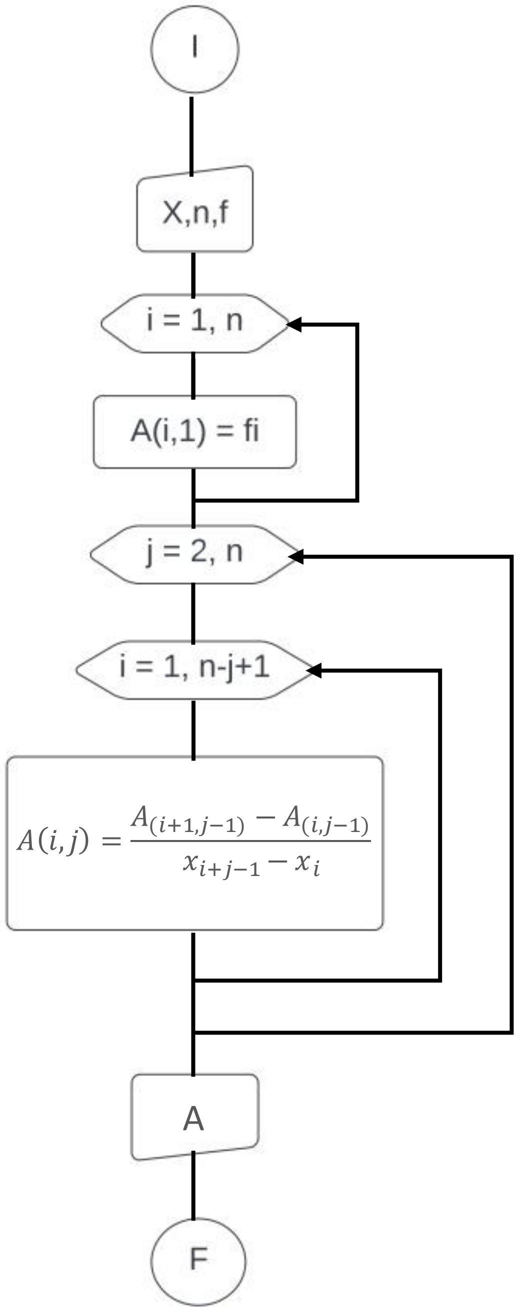
A partir de estas funciones divididas podemos obtener el polinomio interpolador, también llamado Fórmula de Newton.

P(x)= f1 + f[x1,x2] * (x – x1) + f[x1,x2,x3] * (x – x1) * (x - x2) + … + f[x1,x2,…,xn] * (x – x1) * (x - x2) * … * (x – xn-1)

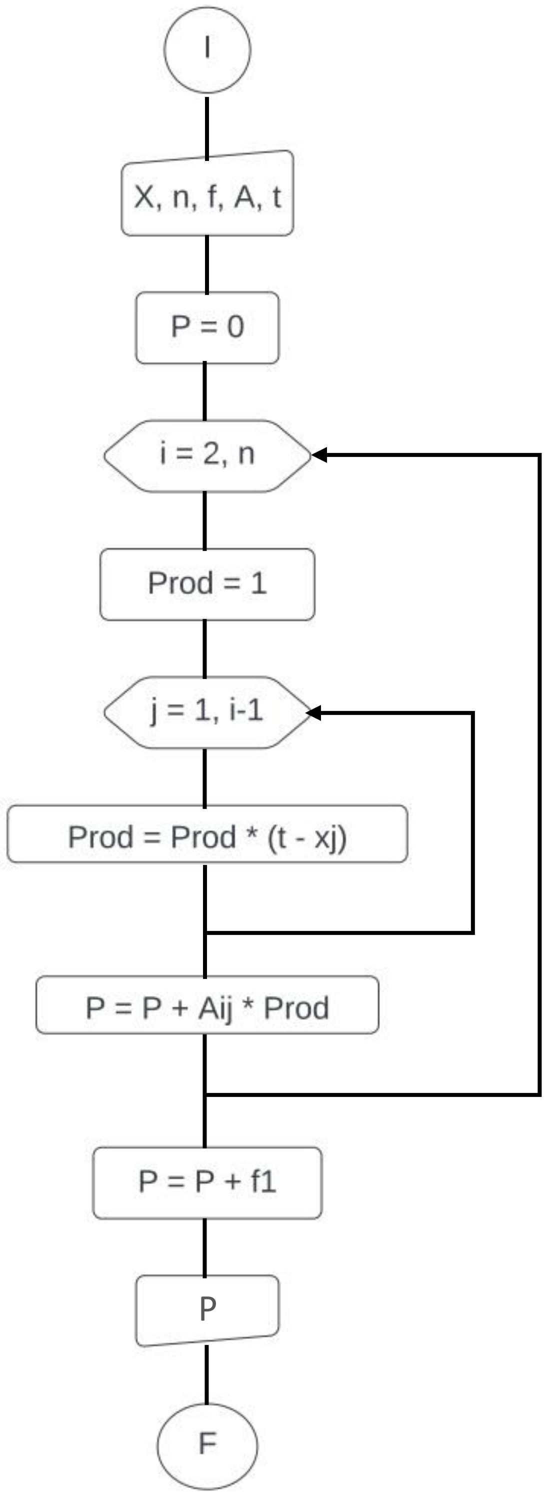
La fórmula general es: $P(x) = f1 + \sum_{i=2}^{n}(f[x1, x2, \ldots, xi] * \sum_{j=1}^{i=1}(x - xj))$

El algoritmo por el cual se obtiene la fórmula de Newton incluye obtener la matriz A;

$$A(i,j) = \frac{A_{(i+1,j-1)} - A_{(i,j-1)}}{x_{i+j-1} - x_i}$$



A partir de esta matriz A podemos obtener el algoritmo que da como resultado el polinomio interpolador P, y obtener el valor interpolado de un número cualquiera t. Contamos además como datos iniciales con los números de soporte (x) y los valores en esos puntos (f).



Y esto es todo lo que necesitas saber sobre Interpolación de Lagrange. ¡Ánimo!