INTERPOLACIÓN DE LAGRANGE MEDIANTE POLINOMIOS DE BASE

Se trabaja con la siguiente expresión para obtener el polinomio interpolador a partir de los polinomios de base:

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i \, L_i(x)$$

Las funciones de base $L_i(x)$ son polinomios del mismo grado que el polinomio buscado p(x). En x_i, el polinomio de base vale 1, mientras que en los demás puntos del soporte vale 0.

$$p(x_1) = f_1 L_1(x_1) + f_2 L_2(x_1) + \cdots + f_n L_n(x_1) = f_1$$

CÁLCULO DE LOS POLINOMIOS DE BASE

Suponemos un soporte general de n puntos; se obtendrán n polinomios de base:

$$L_i(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)}{(x_i - x_1)(x_i - x_2) \ldots (x_i - x_n)}$$

Para obtener una fórmula más general, lo escribimos como un productorio:

$$L_i(x) = \prod_{j=1}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Es importante que $i \neq j$ porque si no el denominador sería 0

Ejemplo con tres puntos de soporte

Para aclarar el concepto, utilizaremos un soporte de tres puntos $\{x_1, x_2, x_3\}$en los que se conoce el valor de la función $\{f_1, f_2, f_3\}$, por lo cual, obtendremos 3 polinomios de base.

$$L_1(x) = \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}$$

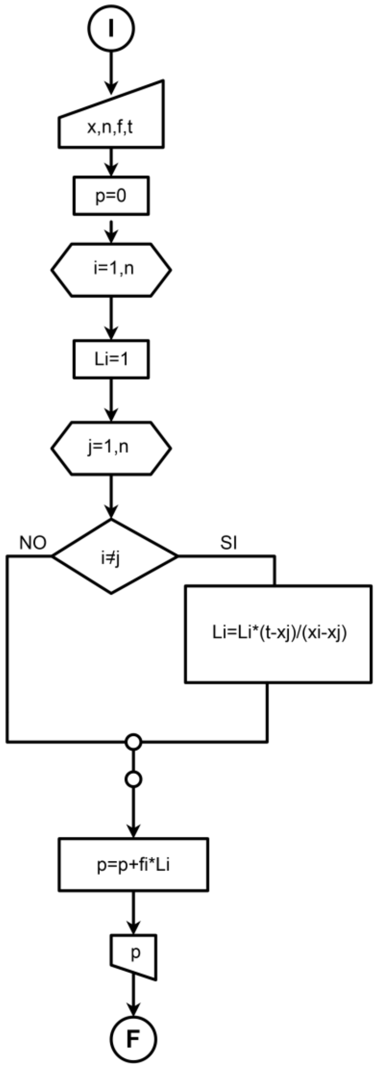
$$L_3(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

Obtenemos el polinomio interpolador realizando la suma de los productos entre los polinomios de base y el valor de la función en ese punto:

$$p(x) = f_1 L_1(x) + f_2 L_2(x) + f_3 L_3(x) =$$

$$= f_1 \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + f_2 \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} + f_3 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

ALGORITMO PARA OBTENER EL POLINOMIO INTERPOLADOR DE LAGRANGE Y LOS POLINOMIOS DE BASE



EJERCICIO VISTO EN CLASE SOBRE POLINOMIOS DE BASE

Se conoce la temperatura de un líquido en ciertos instantes de tiempo. Se desea estimar la temperatura en otro punto distinto (t); para ello:

a) Si los tiempos son {1,5,8} y las temperaturas T= {10, 20, 50}; estimar el valor de la temperatura en t=2 mediante interpolación de Lagrange con polinomios de base.

$$L_1(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(x-5)(x-8)}{(1-5)(1-8)} = \frac{(x-5)(x-8)}{28}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{(x-1)(x-8)}{(5-1)(5-8)} = \frac{(x-1)(x-8)}{-12}$$

$$L_3(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{(x-1)(x-5)}{(8-1)(8-5)} = \frac{(x-1)(x-5)}{21}$$

$$\begin{aligned} p(x) &= T_1L_1(x) + T_2L_2(x) + T_3L_3(x) \\ &= 10\frac{(x-5)(x-8)}{28} + 20\frac{(x-1)(x-8)}{-12} + 50\frac{(x-1)(x-5)}{21} p(2) \\ &= 10\frac{(-3)(-6)}{28} + 20\frac{(1)(-6)}{-12} + 50\frac{(1)(-3)}{21} = \frac{180}{28} + \frac{120}{12} - \frac{150}{21} = \frac{65}{7} = 9{,}29ºC \end{aligned}$$

9,29ºC es la temperatura estimada en t=2

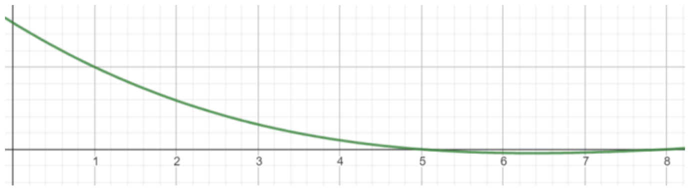
b) Estimar la temperatura en t=2 sabiendo que:

Tiempo	1	5	8	14
Temperatura	10	20	50	-12

Obtener el polinomio interpolador mediante funciones de base, representar las funciones y estimar en t=2 y t=10

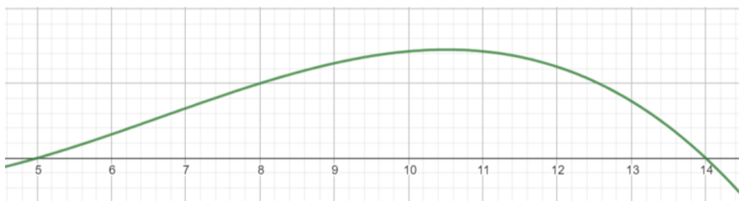
$$p(x) = T_1L_1(x) + T_2L_2(x) + T_3L_3(x) + T_4L_4(x)$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)} = \frac{(x-5)(x-8)(x-14)}{(-4)(-7)(-13)} = \frac{(x-5)(x-8)(x-14)}{-364}$$

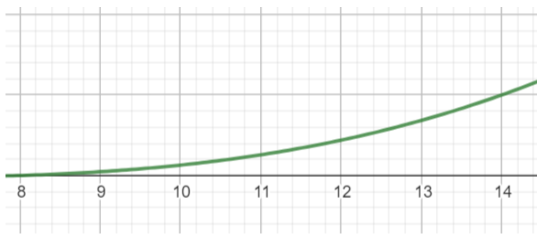


$$L_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)} = \frac{(x-1)(x-8)(x-14)}{(4)(-3)(-9)} = \frac{(x-1)(x-8)(x-14)}{108}$$

$$L_3(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)} = \frac{(x-1)(x-5)(x-14)}{(7)(3)(-6)} = \frac{(x-1)(x-5)(x-14)}{-126}$$



$$L_4(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)} = \frac{(x-1)(x-5)(x-8)}{(13)(9)(6)} = \frac{(x-1)(x-5)(x-8)}{702}$$



$$p(x) = 10\frac{(x-5)(x-8)(x-14)}{-364} + 20\frac{(x-1)(x-8)(x-14)}{108} + 150\frac{(x-1)(x-5)(x-14)}{-126} - 12\frac{(x-1)(x-5)(x-8)}{702}$$

$$p(2) = \frac{2160}{364} + \frac{1440}{108} + \frac{1800}{-126} - \frac{216}{702} = 4{,}67ºC$$

$$p(2) = \frac{400}{364} - \frac{1440}{108} + \frac{9000}{126} - \frac{1080}{702} = 57{,}66ºC$$