EJERCICIO PROPUESTO INTEGRACIÓN NUMÉRICA

Obtener una fórmula de Newton-Cotes abierta con dos puntos de soporte para aproximar $\int_a^b f(x)dx$. Llamamos h a la distancia entre dos puntos consecutivos.

Aplicarla a $\int_1^4 (x^3 + x^2 - 1)dx$

Para obtener una fórmula de integración numérica tenemos que obtener primero el polinomio interpolador (recomendamos que sea por el método de diferencias divididas) y posteriormente integrarlo. Como el enunciado nos dice que la fórmula tiene que ser abierta, no incluiremos los extremos de integración (a y b) en el soporte, sino que solo emplearemos dos puntos equidistantes entre ellos (pues las fórmulas de Newton-Cotes usan un soporte equidistante). Por tanto, los puntos de soporte serán a+h y a+2h (h es la distancia entre puntos, que se nos da como dato o la podemos calcular)

Polinomio interpolador:

x_1=a+h	f(a+h)	(f(a+2h)-f(a+h))/h
x_2=a+2h	f(a+2h)	

$$p(x) = f(a+h) + \frac{f(a+2h) - f(a+h)}{h} \cdot (x - a - h)$$

$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p(x)dx = \displaystyle\int_a^b f(a+h) + \frac{f(a+2h)-f(a+h)}{h} \cdot (x-a-h)\, dx =$

$= \displaystyle\int_a^b f(a+h)dx + \frac{f(a+2h)-f(a+h)}{h} \int_a^b (x-a-h)\, dx =$

$= f(a+h) \cdot [x]_a^b + \frac{f(a+2h)-f(a+h)}{h} \cdot \left[\frac{x^2}{2} - ax - hx\right]_a^b =$

$=(b-a) \cdot [f(a+h) + \frac{f(a+2h)-f(a+h)}{h} \cdot (\frac{a+b}{2} - (a+h))] =$

$= (b-a) \cdot \left[f(a+h) + \frac{f(a+2h)-f(a+h)}{h} \cdot \frac{h}{2}\right] =$

$= (b-a) \cdot \left[f(a+h) + \frac{f(a+2h)-f(a+h)}{2}\right] = 3h \left[f(a+h) + \frac{f(a+2h)-f(a+h)}{2}\right] =$

$= \frac{3h}{2} \cdot (f(a+2h) + f(a+h))$

Como podemos comprobar, es una fórmula del tipo $\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n c_i f(x_i)$, donde n=2,

$c_1 = \frac{3h}{2}$, $c_2 = \frac{3h}{2}$, x_1=a+2h y x_2=a+h

Para la función propuesta, a=1, b=4 y h=1, y por tanto,

$$\int_1^4 (x^3 + x^2 - 1)dx \approx \frac{3 \cdot 1}{2} \cdot \big(f(3) + f(2)\big) = \frac{3}{2} \cdot (35 + 11) = 69$$

La dificultad del ejercicio reside fundamentalmente en el desarrollo de la integral, pero por lo demás es bastante rápido y fácil de aplicar a cualquier otra función.