FÓRMULAS DE INTEGRACIÓN DE TIPO INTERPOLATORIO

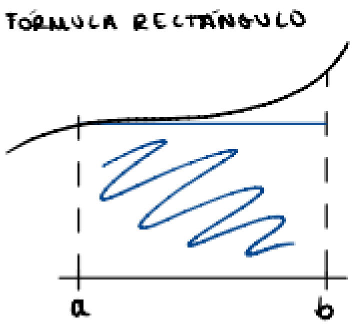
INTEGRACIÓN NUMÉRICA 1

Buscamos aproximar integrales mediante funciones. Para ello haremos uso de fórmulas obtenidas gracias a la aproximación mediante polinomios.

- **Fórmula del rectángulo**

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \sim (b-a) * f(a)}$$

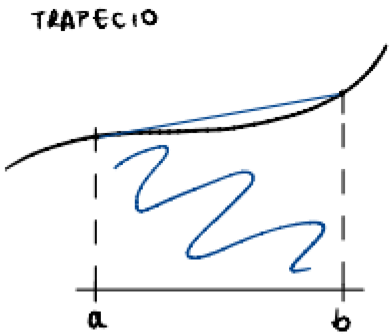
Área del rectángulo= Base*Altura = f(a)*(b-a)



- **Fórmula del trapecio**

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \sim \frac{f(a)+f(b)}{2} * (b-a)}$$

Área del trapecio = $\frac{base\ mayor + base\ menor}{2} * Altura$



Otra forma de obtener fórmula del trapecio

P(x)= f(a)+f [a,b] *(x-a) = $f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a} * (x-a)$

$$\int_a^b f(x)dx \sim \int_a^b p(x)dx = \int_a^b \big(f(a) + f[a,b](x-a)\big)dx = \int_a^b f(a)dx + \int_a^b f[a,b](x-a)dx =$$

$$= f(a)(b-a) + f[a,b]\left(\frac{x^2}{2} - ax\right)_a^b = f(a)(b-a) + f[a,b]\left(\frac{b^2-a^2}{2} - a(b-a)\right) =$$

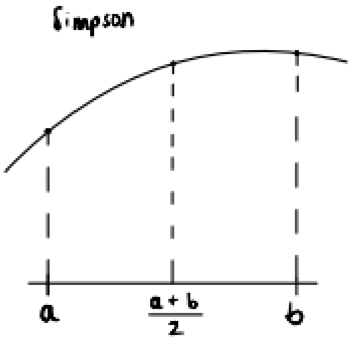
$$= f(a)(b-a) + f[a,b]\left(\frac{(a+b)(b-a)}{2} - a(b-a)\right) = (b-a)\left(f(a) + f[a.b]\left(\frac{a+b}{2} - a\right)\right) =$$

$$= (b-a)\left(f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a} * \frac{b-a}{2}\right) = (b-a) * \left(f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{2}\right) = \boxed{(b-a)\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)}$$

Integración numérica 1

- **Fórmula de Simpson**

$\int_a^b f(x)dx \sim \int_a^b p(x)dx$ Aproximamos la función como la integral del polinomio.



EJEMPLO:

Queremos aproximar $\int_{-h}^{h} f(x)dx$

P(x)=f(-h)+f[-h,0](x+h)+f[-h,0,h](x+h)x

$$\int_{-h}^{h} f(x)dx \sim \int_{-h}^{h} p(x)dx = \int_{-h}^{h} f(-h)dx + \int_{-h}^{h} f[-h,0](x+h)dx + \int_{-h}^{h} f[-h,0,h](x+h)xdx =$$

$$= f(-h)(2h) + f[-h,0]\left(\frac{x^2}{2} + hx\right)_{-h}^{h} + f[-h,0,h]\left(\frac{x^3}{3} + \frac{hx^2}{2}\right)_{-h}^{h} =$$

$$= f(-h)(2h) + f[-h,0](2h^2) + f[-h,0,h]\left(\frac{2h^3}{3}\right) =$$

$$= f(-h)(2h) + \frac{f(0) - f(-h)}{h - 0}(2h^2) + \frac{f(h) - 2f(0) + f(-h)}{2h^2}\left(\frac{2h^3}{3}\right) =$$

$$= 2hf(-h) + 2hf(0) - f(-h) + f(h) - 2f(0) + f(-h) + \frac{h}{3} =$$

$$= 2hf(-h) + 2h\big(f(0) - f(-h)\big) + \frac{h}{3}\big(f(h) - 2f(0) + f(-h)\big) = \frac{2h}{6}(f(-h) + 4f(0) + f(h))$$

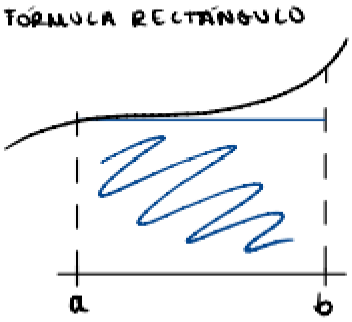
Fórmula de Simpson $\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$

RESUMEN INTEGRACIÓN NUMÉRICA TIPO IMTERPOLATORIO 1

$\int_a^b f(x)dx \sim \int_a^b p(x)dx = \sum_{i=1}^n Ci * f(Xi)$ siendo $\sum_{i=1}^n Ci = b - a$

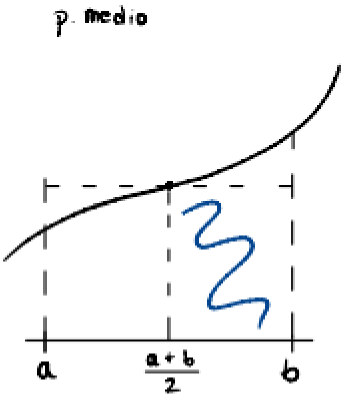
1. Si tenemos (n+1) puntos de polinomio de grado < n, las fórmulas serán exactas para polinomios de grado < n.
2. Si tenemos (n+1) puntos, es exacta para polinomios de grado al menos < n (en algunos casos también para grado =n+1.
3. Exactas, con (n+1) puntos, para polinomios de grado < 2n+1.

Fórmula Rectángulo



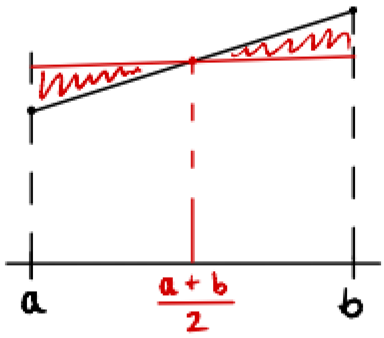
$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \sim (b-a) * f(a)}$$

Fórmula del punto medio (mid-point rule)

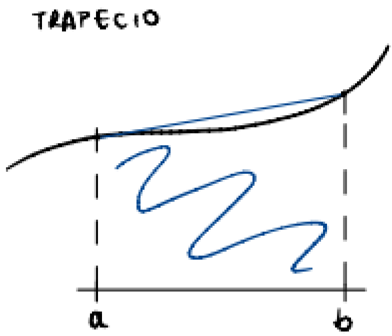


$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \sim (b-a) f\frac{(a+b)}{2}}$$

Exacta para polinomios de grado < 1.



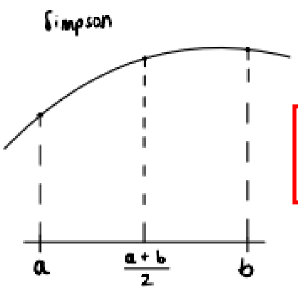
Fórmula del trapecio



$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \sim \frac{f(a)+f(b)}{2} * (b-a)}$$

Exacta para polinomios de grado< 1.

Fórmula de Simpson



Fórmula de Simpson $\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$