Interpolación por tramos de 2º Grado

Como ya hemos visto la interpolación consiste en hallar el valor de un punto desconocido a partir de otros puntos de los que si conocemos los valores.

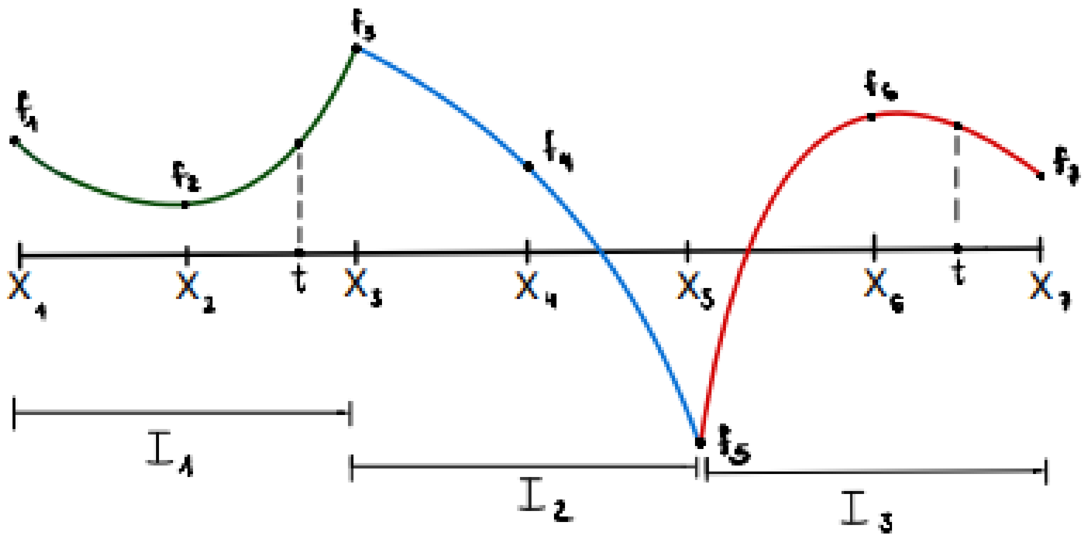
Al interpolar con un número elevado de puntos de soporte se puede dar lugar a que el error cometido sea mayor, por lo que en ese caso podemos hacer uso de la interpolación por tramos. Podemos hacer uso de la interpolación de primer o segundo grado (en este caso haremos uso de la de segundo grado).

En interpolación por tramos de segundo grado dividiremos el soporte en intervalos que estarán establecidos en forma de parábola. Calcularemos las funciones de base en cada Intervalo, serán polinomios de grado dos (grado=n-1, siendo n el número de soportes que posee nuestro intervalo), por ello la forma de parábola que poseen.

En este caso el número de puntos de soportes totales tiene que ser impar para establecer intervalos de 2º grado de forma correcta.

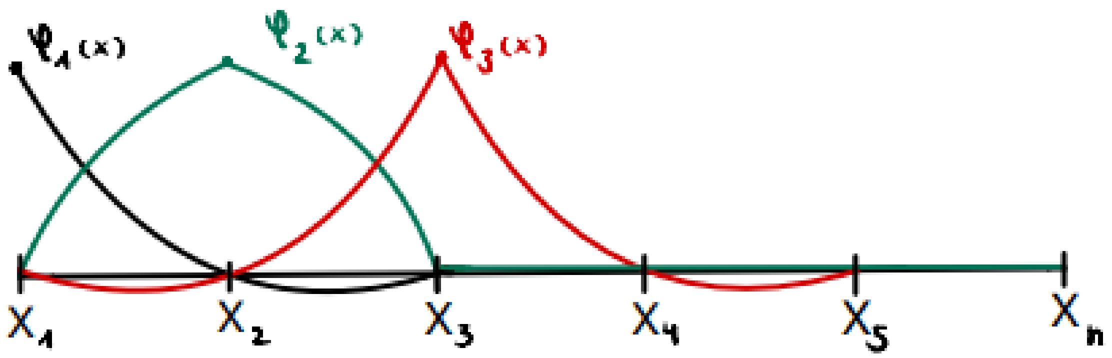
El número de subintervalos que obtendremos se puede calcular como (n-1)/2 . Cogemos el nº de puntos de soporte totales, le restamos uno y lo dividimos entre dos obtenemos el número de intervalos.

Por ejemplo, si tenemos un soporte formado por 7 puntos tendremos (7-1)/2 subintervalos, es decir 3 subintervalos.



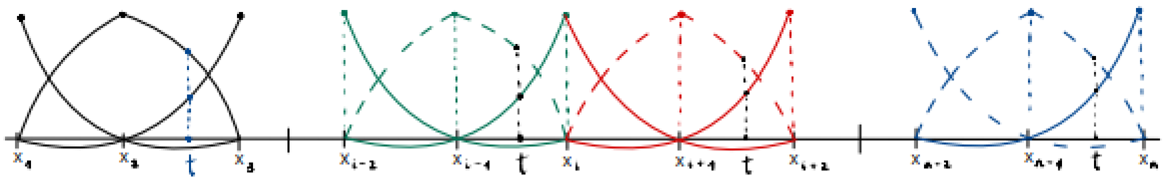
Las funciones de base asociadas a los diferentes puntos del soporte siguen la misma dinámica que hasta ahora, poseen valor 1 en el punto de soporte en el que se calculan y 0 en el resto de los puntos.

En este caso hay que distinguir según la situación en la que se encuentre el valor interpolado:

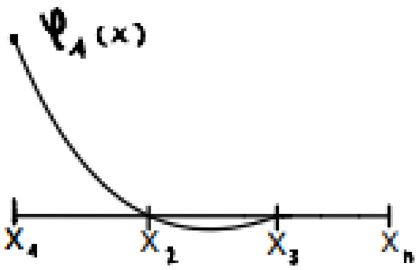


Por ejemplo, si queremos interpolar en el punto t, hay que tener en cuenta que t tendrá un valor en phi (1), en phi (2) y en phi (3) porque todos ellos están en el primer intervalo.

Diferentes funciones de base en un soporte de X puntos:



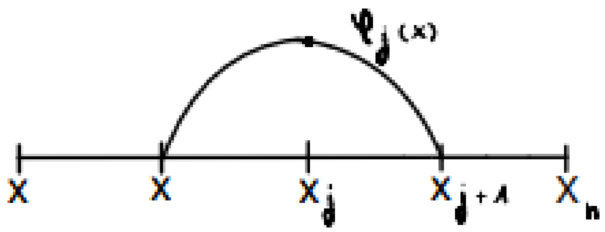
Soporte de n puntos, t son los diferentes valores en los que podríamos interpolar en diferentes intervalos. Se puede observar que varían según donde estén situados. Los intervalos de los extremos poseen funciones de base diferentes.



Phi 1(x), en este caso la función tiene valor 1 en el primer punto de soporte y 0 en el resto.

Las funciones de base en este intervalo serán:

$$\text{Phi } 1\ (x)= \begin{cases} (x-x2)\ (x-x3)/(x1-x2)(x1-x3) & X\in [X1,X3] \\ 0 & X \in [X3,Xn] \end{cases}$$

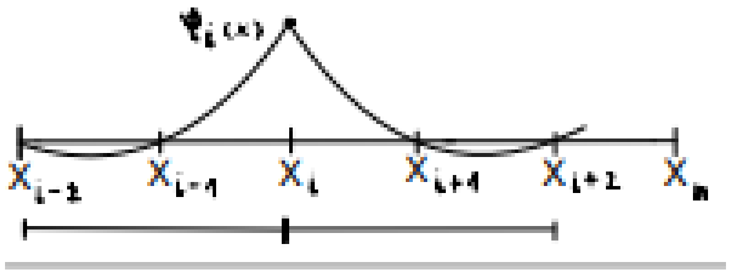


Phi j(x)= interpolamos en un punto t, en este caso el punto en el que la función toma el valor 1 es un punto situado en un punto intermedio del intervalo. No pertenece a ninguno de los extremos.

Función de Base en el ntervalo:

j=2,4,6,…,n-1

$$\text{Phi } j\ (x) = \begin{cases} (X-Xj-1)(X-Xj+1)/(Xj-Xj-1)(Xj-Xj+1) & X \in [Xj-1,Xj+1] \\ 0 & X \nexists [Xj-1,Xj+1] \end{cases}$$



Phi i (x)= En este caso el punto con valor 1 conecta dos subintervalos. Es un punto entre dos subintervalos.

Funcion de Base en el intervalo: Phi i (x) =

$$\begin{cases} (X-Xi+2)(X-Xi+1)/(Xi-Xi+2)(Xi-Xi+1) & X\in [Xi, Xi+2] \\ (X-Xi-2)(X-Xi-1)/(Xi-Xi-2)(Xi-Xi-1) & X\in [Xi,Xi-2] \\ 0 & X\nexists\ [Xi-2,Xi+2] \end{cases}$$

I=3,5,7,…n-2

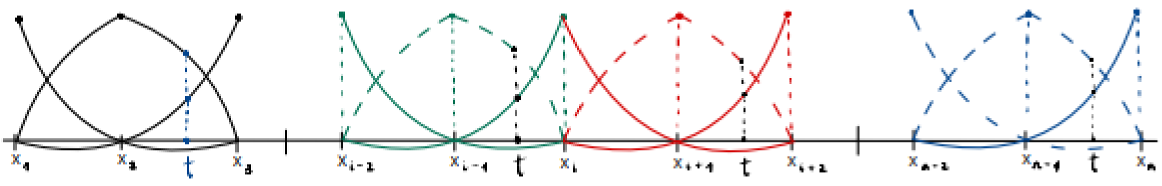
Phi n (x)= el punto en el que la función toma valor 1 es el último punto del soporte. Corresponde al último intervalo.

Funciones de Base en el intervalo: Phi n (X) =

$$\begin{cases} (X-Xn-2)(X-Xn-1)/(Xn-Xn-2)(Xn-Xn-1) & X\in [Xn, Xn-2] \\ 0 & X\nexists\ [Xn-Xn-2] \end{cases}$$

IDEA DEL ALGORITMO (El algoritmo desarrollado se encuentra en un documento aparte)

Suponemos que queremos interpolar en un punto t, conocemos los valores de la función [fi] y el soporte de puntos [Xi].



X1 < t < X3 Xi-2 < t < Xi Xi < t < Xi+2 Xn-2 < t < Xn

Lo primero que calcularemos en este caso son las funciones de base (Phi (t)) y después aplicaremos el polinomio interpolador U(x)=∑ fi* Phi(i) i=1,n.

1.Datos= n,x,f,t

Phi=0

Si t > X1 y t < X3

Phi(1)= (t-X2)(t-X3) / (X1-X2)(X1-X3)

Si t > X3 Phi(1)=0

(En este caso no sería necesario especificar que en caso de que no pertenezca al intervalo su valor sería 0 por que ya lo hemos indicado arriba inicializando Phi a 0)

FIN CONDICIÓN

2. Para j= 2, n-1, 2

Si t > Xj-1 y t < Xj+1

Phi(j)= (t-Xj-1)(t-Xj+1) / (Xj-Xj-1)(Xj-Xj+1)

FIN CONDICIÓN

3. Para i= 3, n-2, 2

Si t > Xi-2 y t < Xi

Phi(i)= (t-Xi-2)(t-Xi-1) / (Xi-Xi-2)(Xi-Xi-1)

Si NO ; t > Xi y t < Xi+2

Phi(i)= (t-Xi+1)(t-Xi+2) / (Xi-Xi+1)(Xi-Xi+2)

FIN CONDICIÓN

4. Si t > Xn-2 y t < Xn

Phi(n)= (t-Xn-2)(t-Xn-1) / (Xn-Xn-2)(Xn-Xn-1)

FIN CONDICIÓN

[U(x)=∑ fi* Phi(i) , para finalizar el algoritmo establecemos la fórmula del polinomio, un sumatorio]

U=0

Para i= 1, n

U=U + Phi(i)*fi

U (Final del Algoritmo)