SEGUNDO PARCIAL 14-15

EJERCICIO 1

Realizar un organigrama para aplicar la fórmula de Simpson compuesta a la resolución de la integral $\int_a^b f(x)dx$. Para ello se seguirá el siguiente procedimiento:

1) Introducir datos de entrada: f, a, b, N (número de subintervalos).
2) Generar un vector s de N+1 componentes que representen las posiciones de los puntos de un soporte equidistante en [a,b], almacenando en la variable h la longitud de cada uno de los subintervalos.
3) Obtener el valor de la integral mediante:

$$\text{valor} = \frac{h}{6}\left(f(a) + 4\sum_{i=1}^{N} f\left(\frac{s_i + s_{i+1}}{2}\right) + 2\sum_{i=2}^{N} f(s_i) + f(b) \right)$$

EJERCICIO 2

Los valores de la concentración del colesterol LDL en muestras de sangre de tres pacientes se almacenan en sendos vectores u, v, w respectivamente. El número de muestras de cada paciente serán: p, q, r respectivamente. Se pide realizar un organigrama para construir una matriz L, de 3 columnas y N filas de manera que la primera columna esté formada por los elementos del vector u, la segunda por los elementos del vector v y la tercera por los elementos del vector w. Además, N se calculará como el mayor valor entre p, q, r.
Nota: La matriz L será inicializada a 0.

EJERCICIO 3

La concentración de bacterias contaminantes c en un lago disminuye de acuerdo con la ecuación: $c = 75e^{-1.5t} + 20e^{-0.075t}$. Determina el tiempo que se requiere para que la concentración de las bacterias sea c=15, mediante el método de Newton-Raphson, con un valor inicial de t=6 y criterio de detención de 0.5%

Nota: Emplea el criterio de detención: $\varepsilon = \left|\frac{t_i - t_{i-1}}{t_i}\right| 100$

EJERCICIO 4

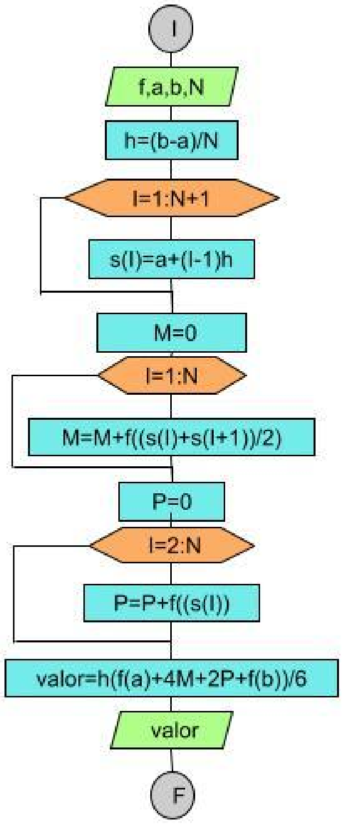
Se pide:

a) Obtener una fórmula de integración numérica para aproximar el valor de la integral $\int_{-3h}^{3h} f(x)dx$ tomando como soporte los puntos {-2h,3h}, siendo h un número real positivo.

b) Realizar una estimación del error que se comete en la fórmula del apartado a).

SOLUCIONES

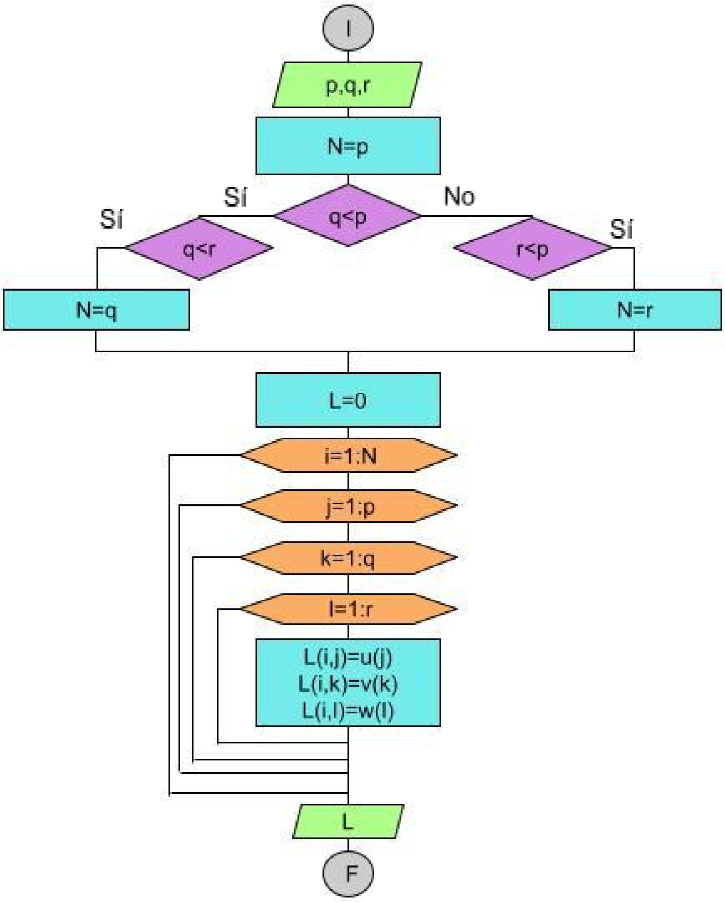
Ejercicio 1



Para realizar el organigrama, primero calculamos h, la distancia entre cada intervalo (por ello dividimos entre N, que es el número de subintervalos). A continuación, calculamos los valores de los puntos (tenemos N+1 puntos) con un bucle for. Por último para obtener el valor final aplicamos la fórmula realizando dos bucles for para los sumatorios.

Obtenemos el valor final.

Ejercicio 2



Para realizar el organigrama, primero almacenamos en N, el número mayor de muestras, por lo que asignamos un valor cualquiera como el máximo y lo vamos comparando con los demás, y si son mayores se almacenan en la variable.

A continuación, con los bucles for, construimos la matriz, teniendo en cuenta que el bucle de filas, queda más exterior que el de las columnas. Dado que estamos colocando los vectores, el número de elementos máximo de las variables asignadas serán los valores finales del bucle.

Obtenemos L como valor final.

Ejercicio 3

Para hallar el tiempo en el que c, concentración de bacterias, es 15; debemos igualar la función a 0 para hallar el punto de corte con el eje de ordenadas. Concretamente vamos a aplicar el método de Newton-Raphson que usa puntos de tangencia:
x[i]=x[i-1]-f(t[i])/f'(t[i-1]).

Tenemos que hallar la derivada de la función y aplicar la fórmula de Newton-Raphson un número de iteraciones hasta hallar una detención que se encuentre alrededor del 0,5%. Sabemos que si converge el número de iteraciones no tiene que ser elevado. Comenzamos a calcular:

$$f(t) = 75e^{-1.5t} + 20e^{-0.075t} - 15$$

$$f'(t) = -112.5e^{-1.5t} - 1.5e^{-0.075t}$$

Tiempo	0	1	2	3
Newton-Raphson	6	3,693371484	3,981896206	4,001563209

Nota: se puede observar que con cada iteración la variación en el número es menor, por lo que se está aproximando y está convergiendo hacia el valor real. Por eso podemos advertir que con tres iteraciones puede ser suficiente para obtener la detención deseada.

Error=[(4.001563209-3.981896206)/4.001563209]*100=0,5%

Ejercicio 4

Realizamos el polinomio de Lagrange con el método que prefiramos (las diferencias divididas son más fáciles de integrar) y realizamos la integral. Una vez obtenida, calculamos el error restando el valor exacto al valor aproximado. Como no hablamos de una función como tal sino de f(x), lo desarrollamos para poder restarlos:

A)

$$\int_{-3h}^{3h} f(x)dx \approx \int_{-3h}^{3h} p(x)dx = \int_{-3h}^{3h} \left(f(-2h) + \frac{f(3h) - f(-2h)}{5h}(x + 2h) \right) dx =$$

$$= \frac{h}{5}(18f(-2h) + 12f(3h))$$

B)

VALOR EXACTO

$$\int_{-3h}^{3h} f(z)dz = F(3h) - F(-3h) = F(0+3h) - F(0-3h) =$$

$$= F(0) + 3hF'(0) + \frac{9h^2}{2}F''(0) + \frac{27h^3}{6}F'''(2) + ... - (F(0) - 3hF'(0) + \frac{9h^2}{2}F''(0) - \frac{27h^3}{6}F'''(0) + ...) =$$

$$= 6hF'(0) + 9h^3F'''(0) = 6hf(0) + 9h^3f''(0)$$

VALOR APROXIMADO

$$\frac{h}{5}(18f(0-2h) + 12f(0+3h)) =$$

$$= \frac{h}{5}(18f(0) - 36hf'(0) + 36h^2f''(0) - \frac{144h^3}{6}f'''(0) + ... +$$

$$+12f(0) + 36hf'(0) + 54h^2f''(0) - \frac{324h^3}{6}f'''(0) + ...) =$$

$$= 6hf(0) + 90h^3f''(0)$$

Error= Valor exacto-Valor aproximado= 81h3f''(0)