SEGUNDO PARCIAL 2017-2018

EJERCICIO 1

El trabajo realizado por un gas cuyo volumen varía desde un valor inicial VI hasta un valor final VF viene dado por la integral $\int_{VI}^{VF} PdV$, donde P es la presión del gas y dV representa la variación de volumen del mismo.

Se desea realizar un ORGANIGRAMA y el correspondiente PSEUDO-CÓDIGO para determinar W mediante una fórmula de integración numérica compuesta dada por:

$$W = \sum_{i=1}^{N} \left(\sum_{j=1}^{3} C_{i,j} P_{i,j} \right),$$

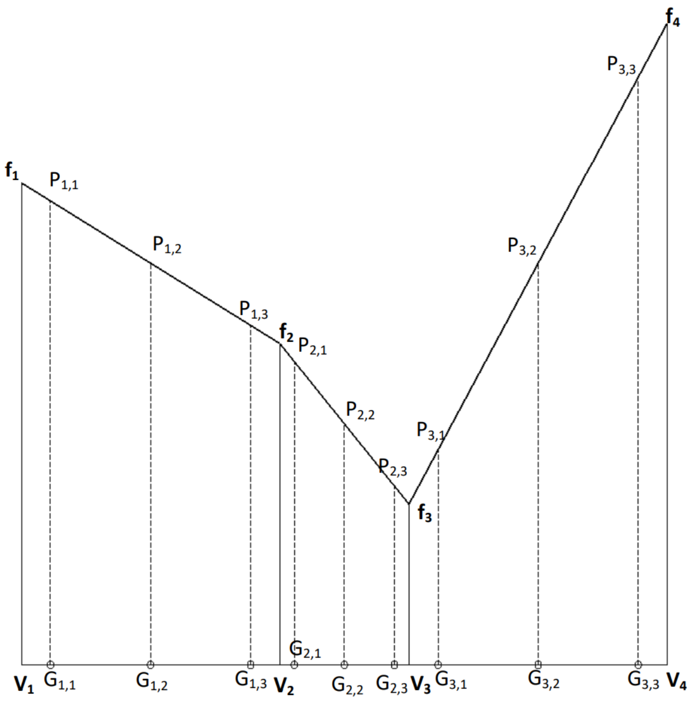
donde N es el número de subintervalos en el que se divide el intervalo de integración [VI,VF]; Pi,j son los valores de la presión del gas para cada subintervalo i en cada punto de integración j; Ci,j son los coeficientes (también llamados pesos) de la fórmula para cada intervalo i y en cada punto de integración j.

Se dispone de los valores de la presión para diversos volúmenes del gas. Dichos valores de la presión se encuentran almacenados en un vector f (de N+1 componentes, que son los extremos de los subintervalos) y los volúmenes en otro vector V (de N+1 componentes, que son los extremos de los subintervalos). Conocidos tales valores se obtendrán los valores Pi,j mediante interpolación lineal en cada subintervalo [Vi ,Vi+1], (i=1,…,N) (empléese para ello la fórmula de Newton en cada subintervalo). Los puntos de integración en cada subintervalo se calcularán mediante las expresiones:

$$G_{i,j} = \frac{V_i + V_{i+1}}{2} + \frac{h_i}{2} z_j, \quad (i = 1,..., N; j = 1,2,3)$$

Siendo $h_i = V_{i+1} - V_i$; $z_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}}$; $z_2 = 0$; $z_3 = \sqrt{\frac{3}{5}}$; mientras que los coeficientes $C_{i,j}$ se calculan mediante las expresiones $C_{i,j} = \frac{h_i}{2} k_j, \quad (i = 1,..., N; j = 1,2,3)$ con $k_1 = k_3 = \frac{5}{9}; k_2 = \frac{8}{9}$

Figura aclaratoria (para un ejemplo constiruido por 3 intervalos):



SOLUCIÓN:

Inicio de pseudo-código

```
Leer V, f, N
z[1]=-sqrt(3/5); z[2]=0; z[3]=sqrt(3/5); k[1]=5/9; k[2]=8/9; k[3]=5/9
Para i=1:N
  h=V[i+1]-V[i]
  Para j=1:3
    G[i,j]=(V[i+1]+V[i])/2+h/2*z[j]; C[i,j]=h/2*k[j]
     P[i,j]=f[i]+(f[i+1]-f[i])/2*(G[i,j]-V[i])
  Fin de bucle
Fin de bucle
W=0
Para i=1:N
  suma=0
  Para j=1:3
```

suma=suma+C[i,j]P[i,j]

Fin de bucle

W=W+suma

Fin de bucle

Escribir W

Fin de pseudo-código

EJERCICIO 2

Una sustancia química se propaga por difusión en un medio poroso, supuesto unidimensional. Se ha medido la concentración de dicha sustancia en M puntos del medio cuyas coordenadas están almacenadas en un vector s (s1, s2, …, sM). El valor de la concentración en cada uno de los puntos viene dado por un vector u (u1, u2, …, uM).

Se desea realizar un ORGANIGRAMA para determinar el punto en el que el flujo de materia es máximo, así como el valor de dicho flujo. Para ello se realizará una interpolación constituida por polinomios de tercer grado que se obtendrán subdividiendo el intervalo [s1,sM] en (M-1)/3 subintervalos de extremos s_{3i-2}, s_{3i+1}. Los puntos de soporte a emplear en cada subintervalo serán $\{s_{3\cdot i-2}, s_{3\cdot i-1}, s_{3\cdot i}, s_{3\cdot i+1}\}$

NOTA: La fórmula que permite calcular el flujo de materia en un punto x, φ(x), es $\varphi(x) = -D\frac{du}{dx}$ donde D es una constante conocida que representa el coeficiente de difusión de la sustancia en el medio poroso.

SOLUCIÓN:

Utilizaremos la notación:

$$\begin{array}{lllll} a = s_{3i-2} & f = u_{3i-2} & D1A = u[a,b] & D2A = u[a,b,c] & D3 = u[a,b,c,d] \\ b = s_{3i-1} & g = u_{3i+1} & D1B = u[b,c] & D2B = u[b,c,d] & \\ c = s_{3i} & h = u_{3i} & D1C = u[c,d] & & \\ d = s_{3i+1} & k = u_{3i+1} & & & \end{array}$$

Con lo que, de acuerdo con la fórmula de Newton, el polinomio interpolador es:

p(x) = f+ D1A(x-a)+ D2A(x-a)(x-b)+D3(x-a)(x-b)(x-c)

Dado que el flujo depende de la derivada, calculamos la derivada del polinomio:

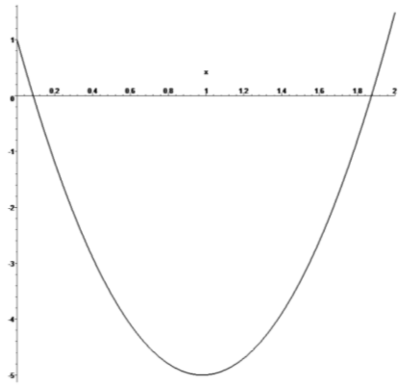
p'(x) = D1A+D2A(2x-a-b)+D3((x-a)(x-b)+(x-a)(x-c)+(x-b)(x-c))

Dado que se pide el valor máximo del flujo, se requerirá obtener el valor máximo de p’(x), para lo cual calculamos su derivada:

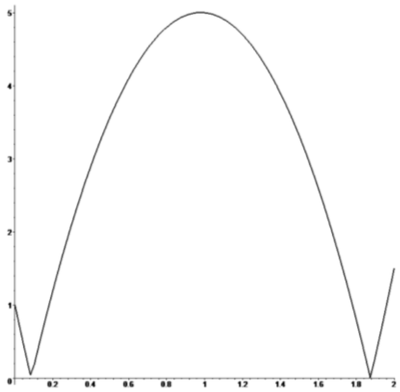
p"(x) = 2(D2A+D3(3x-a-b-c))

que se anulará en el punto: $x = -\frac{D2A}{3 \cdot D3} + \frac{a+b+c}{3}$

Con el fin de encontrar el máximo, no se puede aplicar el “criterio de la segunda derivada”, que en este caso sería p’’’(x) (no olvidemos que buscamos el valor máximo del FLUJO, que depende de p’(x)). El motivo de no poder utilizar ese criterio es porque p’(x) podría ser del tipo:



donde lo que sucede es que en el punto en que p’’(x)=0, p’’’(x)>0 (pues se trata de un mínimo). Sin embargo, como tenemos que considerar el valor absoluto de p’(x), la función |p’(x)| será siempre positiva:



Por este motivo, lo que hay que hacer es comparar el valor que toma p’(x) en los extremos del intervalo con el valor que toma p’(x) en el punto en el que se anula su derivada. Esto se refleja en el algoritmo siguiente:

Inicio de pseudo-código

```
Leer s, u, M
Para i=1:(M-1)/3
  a=s[3i-2]; b=s[3i-1]; c=s[3i]; d=s[3i+1]; f=u[3i-2]; g=u[3i-1]; h=u[3i]; k=u[3i+1]
  D1A=(g-f)/(b-a); D1B=(h-g)/(c-b); D1C=(k-h)/(d-c); D2A=(D1B-D1A)/(c-a); D2B=(D1C-D1B)/(d-b); D3=(D2B-D2A)/(d-a)
  x=-D2A/(3*D3)+(a+b+c)/3
  da=D1A+D2A*(a-b)+D3*(a-b)*(a-c); dd=D1A+D2A*(2d-a-b)+D3*((d-a)(d-c)+(d-a)(d-b)+(d-b)(d-c)); dx=D1A+D2A*(2x-a-b)+D3*((x-a)(x-c)+(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c))
  Si x>=a y x<=d
    Si |dx|>|da y |dx|>|db|
      z[i]=x; p[i]=dx
    Sino, si |da|>|dd|
      z[i]=a; p[i]=da
    Sino,
      z[i]=d; p[i]=dd
    Fin de condición
    Fin de condición
  Sino, si  |da|>|dd|
    z[i]=a; p[i]=da
  Sino,
  z[i]=d; p[i]=dd
  Fin de condición
  Fin de condición
Fin de bucle
dumax=p[1]; xmax=z[1]
Para  i=2:(M-1)/3
  Si |p[i]|>|dumax|
     xmax=z[i]; dumax=p[i]
  Fin de condición
```

Fin de bucle

dumax=-D*dumax

Escribir xmax; dumax

Fin de pseudo-código

EJERCICIO 3

Se tienen los siguientes datos sobre el espacio recorrido (S) por un objeto en función del tiempo (t):

t (s)	t*-d	t*	t*+3d
S (m)	S(t*-d)	S(t*)	S(t*+3d)

donde d es un número positivo próximo a 0 y t* es un tiempo dado. Se pide:

a) Obtener una fórmula de derivación numérica para estimar la velocidad del objeto en el instante t=t* a partir de los datos dados en la tabla y estimar el error que se comete.

b) A partir de la primera ley de Newton: F(t)=m.s''(t) obtener una expresión para la fuerza que actúa sobre el objeto en el tiempo t*, es decir F(t*), si la masa del mismo es m=5kg.

SOLUCIÓN:

Apartado a)

El polinomio interpolador que representa el espacio recorrido por el móvil es:

$$S(t)=S(t^*-d)+\frac{S(t^*)-S(t^*-d)}{d}(t-t^*+d)+\frac{S(t^*+3d)-4S(t^*)+3S(t^*-d)}{12d^2}(t-t^*+d)(t-t^*)$$

Calculamos la derivada del polinomio que representará la velocidad del objeto móvil:

$$v(t)=S'(t)=\frac{S(t^*)-S(t^*-d)}{d}+\frac{S(t^*+3d)-4S(t^*)+3S(t^*-d)}{12d^2}(2t-2t^*+d)$$

Particularizamos la fórmula en el instante pedido t=t* resultando:

$$v(t^*)=S'(t^*)=\frac{S(t^*)-S(t^*-d)}{d}+\frac{S(t^*+3d)-4S(t^*)+3S(t^*-d)}{12d}=\frac{S(t^*+3d)+8S(t^*)-9S(t^*-d)}{12d}$$

Que es la fórmula buscada. Calculamos ahora el error:

$$\frac{S(t^*+3d)+8S(t^*)-9S(t^*-d)}{12d}=$$

$$= \frac{1}{12d}\Big[S(t^*) + 3dS'(t^*) + \frac{9d^2}{2}S''(t^*) + \frac{27d^3}{6}S'''(t^*) + \ 8S(t^*)$$

$$- 9S(t^*) + 9dS'(t^*) - \frac{9d^2}{2}S''(t^*) + \frac{9d^3}{6}S'''(t^*) + \ldots \Big] = S'(t^*) + \frac{d^2}{2}S'''(t^*) + \ldots$$

Despejamos ahora S'(t*):

$$S'(t^*) = \frac{S(t^*+3d) + 8S(t^*) - 9S(t^*-d)}{12d} - \frac{d^2}{2}S'''(t^*) + \ldots$$

Por lo tanto, la fórmula es de segundo orden.

Apartado b)

Calculamos la derivada segunda de S(t) que es la aceleración:

$$a(t^*) = S''(t^*) = \frac{S(t^*+3d) - 4S(t^*) + 3S(t^*-d)}{6d^2}$$

Por lo tanto, la fuerza aplicada será:

$$F(t^*) = 5\frac{S(t^*+3d) - 4S(t^*) + 3S(t^*-d)}{6d^2}$$