INTERPOLACIÓN DE LAGRANGE POR APLICACIÓN DE LA DEFINICIÓN

La interpolación polinómica de Lagrange nos sirve para estimar el valor de una función desconocida en un punto cualquiera, conociendo un conjunto de determinados puntos, a los que llamaremos x_i (**soporte**) y los valores conocidos de la función, f_i, en cada uno de esos puntos. Para ello, debemos obtener **polinomios**, tantos como puntos de soporte haya y de grado menor o igual a n-1, siendo n el número de puntos de soporte

Este primer método se basa en la aplicación de la definición de interpolación mediante la resolución de un sistema y es posible realizar un algoritmo que nos permita obtener la matriz de los coeficientes.

Desarrollando el sistema:

$$\begin{cases} a_1 + a_2x_1 + a_3{x_1}^2 + \cdots + a_n{x_1}^{n-1} = f_1 \\ a_1 + a_2x_2 + a_3{x_2}^2 + \cdots + a_n{x_2}^{n-1} = f_2 \\ \ldots \\ a_1 + a_2x_n + a_3{x_n}^2 + \cdots + a_n{x_n}^{n-1} = f_n \end{cases}$$

Podemos expresarlo en forma de ecuación matricial, $AX = f$, donde X son nuestras incógnitas (es decir, los términos a_i, que no calcularemos) y A es la matriz de los coeficientes, que obtenemos a partir de los puntos del soporte x_i (importante no confundir los términos x_i, que son los puntos del soporte conocidos, con los elementos de la matriz A, que son las incógnitas).

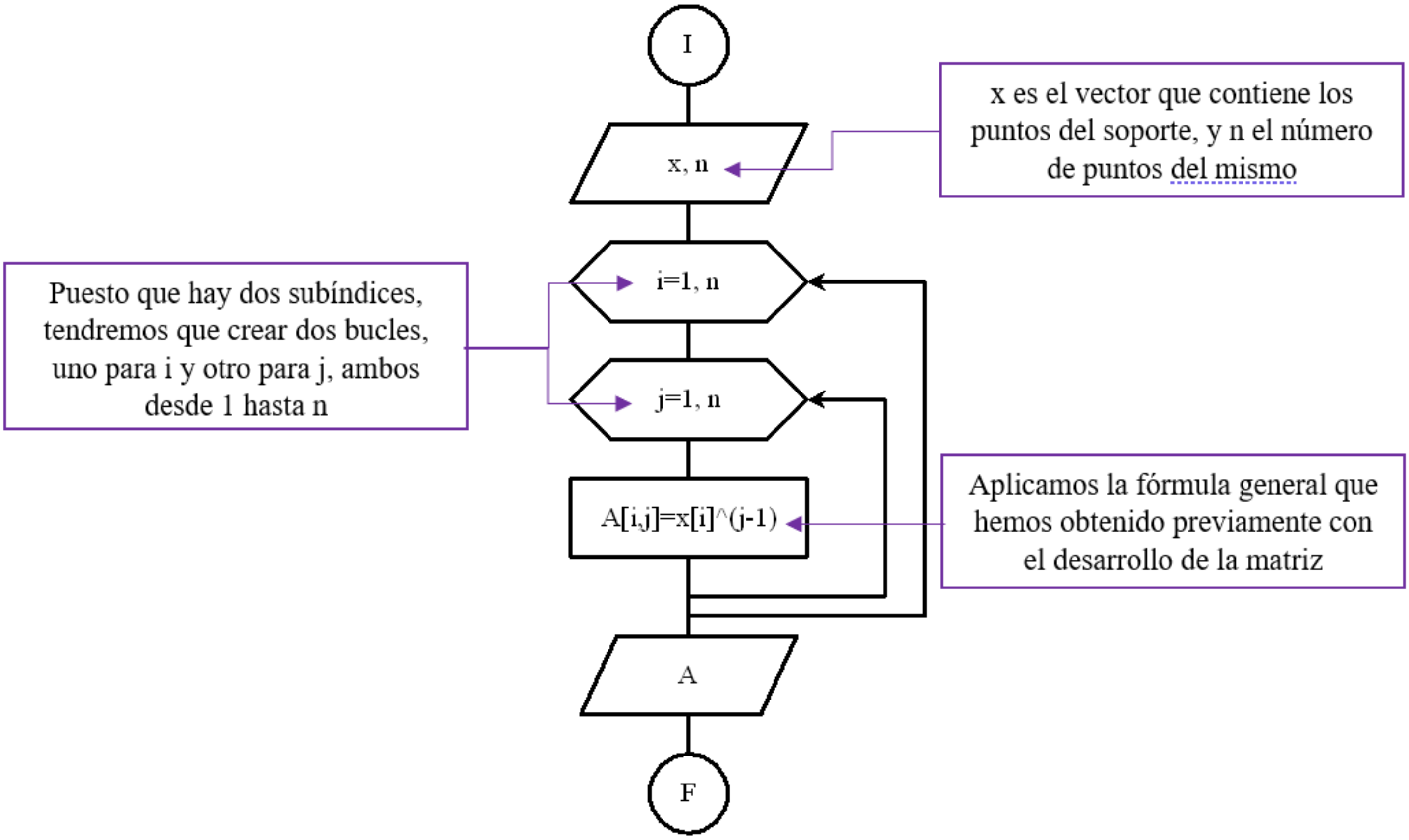
La matriz A queda:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & {x_1}^2 & \ldots & {x_1}^{n-1} \\ 1 & x_2 & {x_2}^2 & & {x_2}^{n-1} \\ \ldots & & & & \\ 1 & x_n & {x_n}^2 & \ldots & {x_n}^{n-1} \end{pmatrix}$$

y por otro lado,

$$X = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \ldots \\ a_n \end{pmatrix}, \text{ y } f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \ldots \\ f_n \end{pmatrix}$$

Es evidente que para el algoritmo de la matriz A tendremos que usar dos bucles, en ambos casos variando desde 1 hasta n. Es muy fácil ver que cada elemento de A se puede obtener como $A_{i,j} = {x_i}^{j-1}$ (algoritmo en la siguiente página)



Si quisiéramos obtener los valores de X (las incógnitas), deberíamos resolver el sistema a mano (por Gauss preferiblemente) o bien, en R, utilizando el comando “solve”.

INTERPOLACIÓN DE LAGRANGE MEDIANTE POLINOMIOS DE BASE

Se trabaja con la siguiente expresión para obtener el polinomio interpolador a partir de los polinomios de base:

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i \, L_i(x)$$

Las funciones de base $L_i(x)$ son polinomios del mismo grado que el polinomio buscado p(x). En x_i, el polinomio de base vale 1, mientras que en los demás puntos del soporte vale 0.

$$p(x_1) = f_1 L_1(x_1) + f_2 L_2(x_1) + \cdots + f_n L_n(x_1) = f_1$$

CÁLCULO DE LOS POLINOMIOS DE BASE

Suponemos un soporte general de n puntos; se obtendrán n polinomios de base:

$$L_i(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)}{(x_i - x_1)(x_i - x_2) \ldots (x_i - x_n)}$$

Para obtener una fórmula más general, lo escribimos como un productorio:

$$L_i(x) = \prod_{j=1}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Es importante que $i \neq j$ porque si no el denominador sería 0

Ejemplo con tres puntos de soporte

Para aclarar el concepto, utilizaremos un soporte de tres puntos $\{x_1, x_2, x_3\}$en los que se conoce el valor de la función $\{f_1, f_2, f_3\}$, por lo cual, obtendremos 3 polinomios de base.

$$L_1(x) = \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}$$

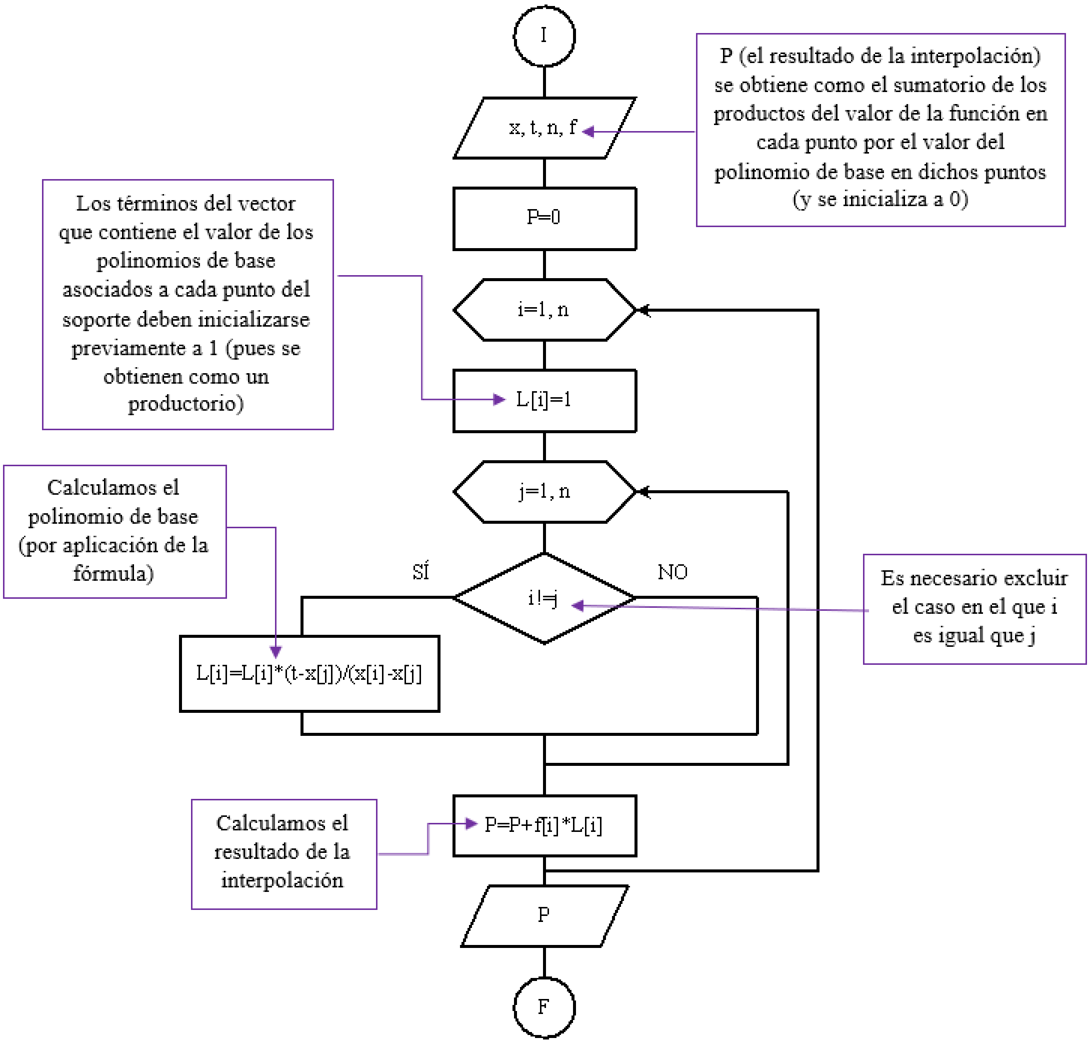
$$L_3(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

Obtenemos el polinomio interpolador realizando la suma de los productos entre los polinomios de base y el valor de la función en ese punto:

$$p(x) = f_1 L_1(x) + f_2 L_2(x) + f_3 L_3(x) =$$

$$= f_1 \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + f_2 \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} + f_3 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

ALGORITMO PARA OBTENER EL POLINOMIO INTERPOLADOR DE LAGRANGE Y LOS POLINOMIOS DE BASE



EJERCICIO VISTO EN CLASE SOBRE POLINOMIOS DE BASE

Se conoce la temperatura de un líquido en ciertos instantes de tiempo. Se desea estimar la temperatura en otro punto distinto (t); para ello:

a) Si los tiempos son {1,5,8} y las temperaturas T= {10, 20, 50}; estimar el valor de la temperatura en t=2 mediante interpolación de Lagrange con polinomios de base.

$$L_1(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(x-5)(x-8)}{(1-5)(1-8)} = \frac{(x-5)(x-8)}{28}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{(x-1)(x-8)}{(5-1)(5-8)} = \frac{(x-1)(x-8)}{-12}$$

$$L_3(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{(x-1)(x-5)}{(8-1)(8-5)} = \frac{(x-1)(x-5)}{21}$$

$$\begin{aligned} p(x) &= T_1L_1(x) + T_2L_2(x) + T_3L_3(x) \\ &= 10\frac{(x-5)(x-8)}{28} + 20\frac{(x-1)(x-8)}{-12} + 50\frac{(x-1)(x-5)}{21} p(2) \\ &= 10\frac{(-3)(-6)}{28} + 20\frac{(1)(-6)}{-12} + 50\frac{(1)(-3)}{21} = \frac{180}{28} + \frac{120}{12} - \frac{150}{21} = \frac{65}{7} = 9{,}29ºC \end{aligned}$$

9,29ºC es la temperatura estimada en t=2

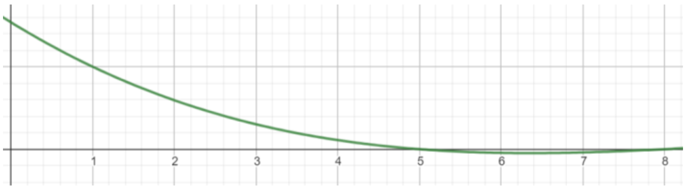
b) Estimar la temperatura en t=2 sabiendo que:

Tiempo	1	5	8	14
Temperatura	10	20	50	-12

Obtener el polinomio interpolador mediante funciones de base, representar las funciones y estimar en t=2 y t=10

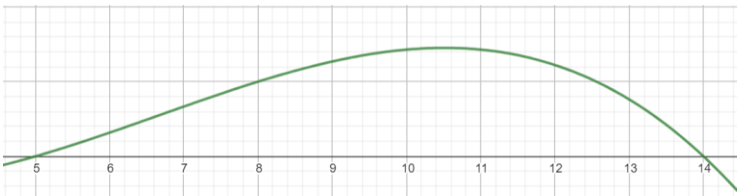
$$p(x) = T_1L_1(x) + T_2L_2(x) + T_3L_3(x) + T_4L_4(x)$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)} = \frac{(x-5)(x-8)(x-14)}{(-4)(-7)(-13)} = \frac{(x-5)(x-8)(x-14)}{-364}$$

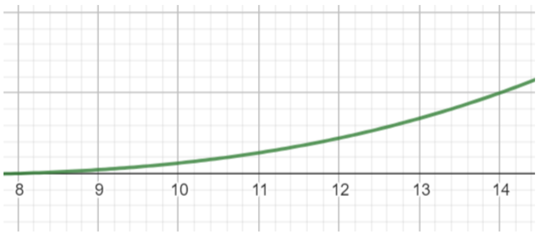


$$L_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)} = \frac{(x-1)(x-8)(x-14)}{(4)(-3)(-9)} = \frac{(x-1)(x-8)(x-14)}{108}$$

$$L_3(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)} = \frac{(x-1)(x-5)(x-14)}{(7)(3)(-6)} = \frac{(x-1)(x-5)(x-14)}{-126}$$



$$L_4(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)} = \frac{(x-1)(x-5)(x-8)}{(13)(9)(6)} = \frac{(x-1)(x-5)(x-8)}{702}$$



$$p(x) = 10\frac{(x-5)(x-8)(x-14)}{-364} + 20\frac{(x-1)(x-8)(x-14)}{108} + 150\frac{(x-1)(x-5)(x-14)}{-126} - 12\frac{(x-1)(x-5)(x-8)}{702}$$

$$p(2) = \frac{2160}{364} + \frac{1440}{108} + \frac{1800}{-126} - \frac{216}{702} = 4{,}67ºC$$

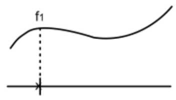
$$p(2) = \frac{400}{364} - \frac{1440}{108} + \frac{9000}{126} - \frac{1080}{702} = 57{,}66ºC$$

INTERPOLACIÓN DE LAGRANGE MEDIANTE DIFERENCIAS DIVIDIDAS

Fórmulas de diferencias divididas de distinto orden

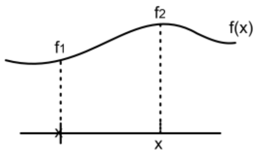
-Diferencia dividida de orden 0 de f en x_1

$f[x_1] = f(x_1)$



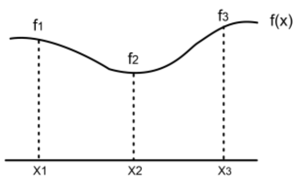
-Diferencia dividida de orden 1 de f con soporte $\{x_1, x_2\}$

$$f[x_1, x_2] = \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1}$$



-Diferencia dividida de orden 2 de f con soporte $\{x_1, x_2, x_3\}$

$$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_2, x_3]}{x_3 - x_1}$$



En general:

Diferencia dividida de orden i de f con soporte $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_{i+1}\}$

$$f[x_1, x_2, \dots, x_{i+1}] = \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_i] - f[x_2, x_3, \dots, x_{i+1}]}{x_{i+1} - x_1}$$

Tabla de diferencias divididas

x_1	f_1	$f[x_1, x_2]$	$f[x_1, x_2, x_3]$	$f[x_1, x_2, x_3, x_4]$
x_2	f_2	$f[x_2, x_3]$	$f[x_2, x_3, x_4]$	
x_3	f_3	$f[x_3, x_4]$		
x_4	f_4			

Algoritmo para la tabla de diferencias divididas

Vamos a construir la tabla de diferencias divididas como una matriz; para ello, tenemos que tener en cuenta las siguientes expresiones:

$A_{i1} = f_i$ i=1,…,n

$A_{ij} = \frac{A_{i+1,j-1} - A_{i,j-1}}{x_{i+j-1} - x_i}$

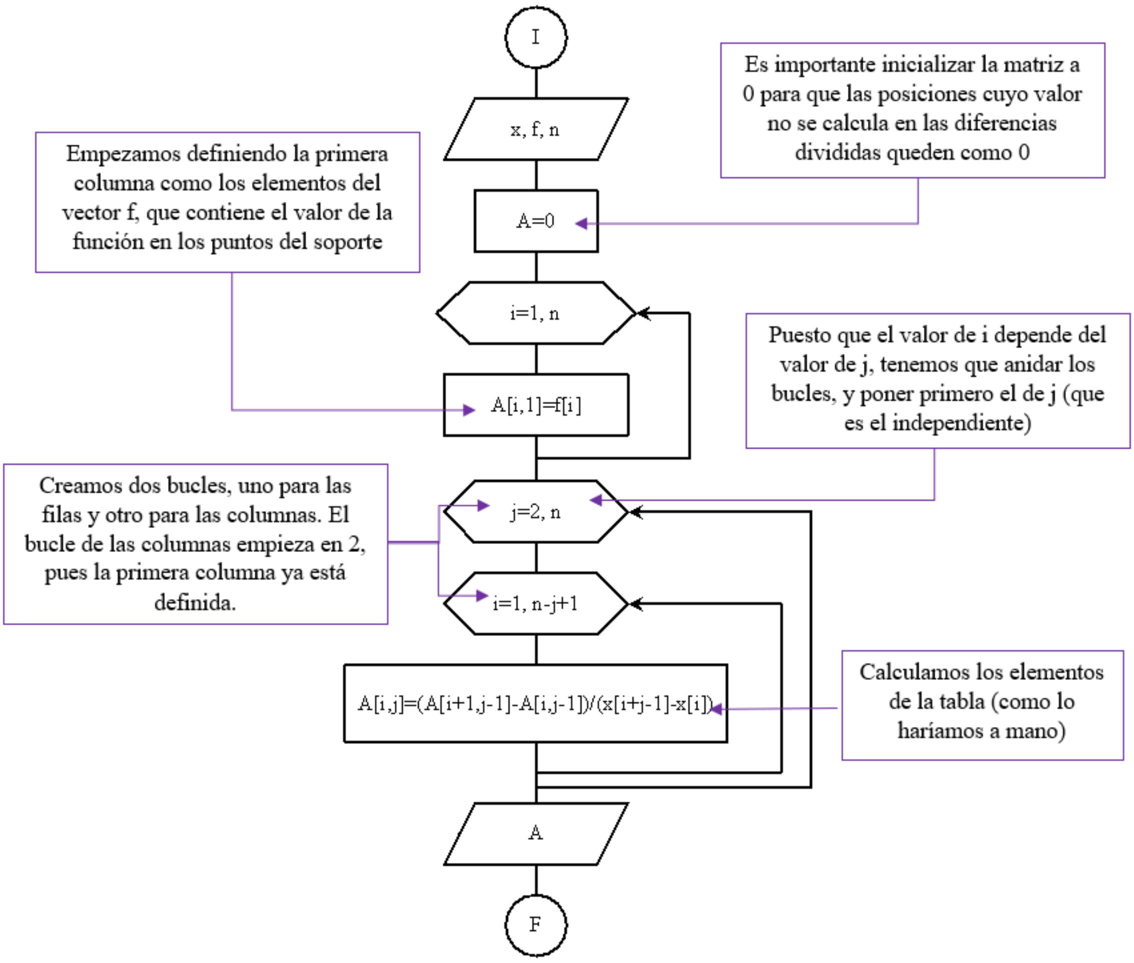
j=2,…,n: número de columnas, empieza en 2 porque la columna uno ya está definida anteriormente

i=1, ..., n-j+1: para las filas

$A_{i+1,j-1}$: elemento de la fila siguiente y columna anterior

$A_{i,j-1}$: elemento de la misma fila y columna anterior

x_{i+j-1}: fila+columna-1



FÓRMULA DE NEWTON

A partir de la tabla de diferencias divididas, se puede obtener el polinomio interpolador por la fórmula de Newton.

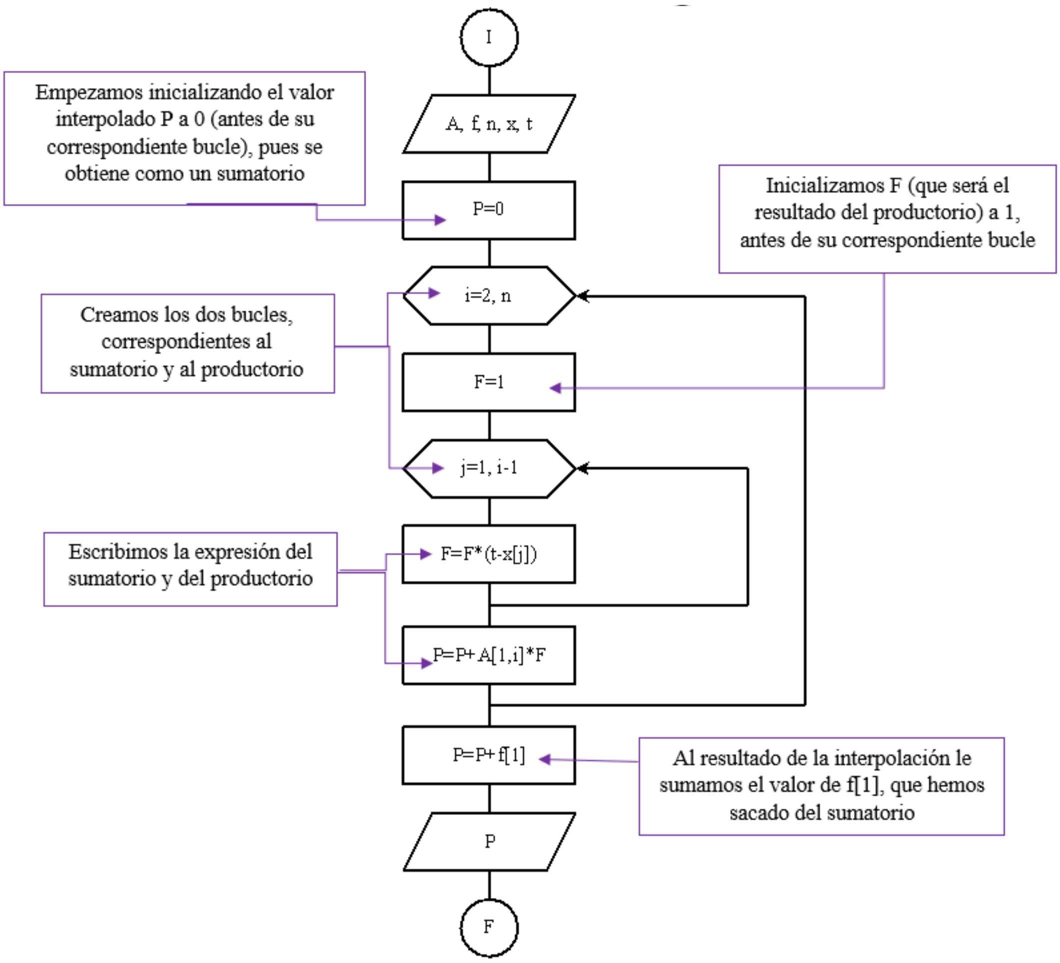
$$p(x) = f_1 + f[x_1, x_2](x - x_1) + f[x_1, x_2, x_3](x - x_1)(x - x_2) + f[x_1, x_2, x_3, x_4](x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) + \cdots + f[x_1, x_2, \ldots, x_n](x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_{n-1})$$

Obtenemos la siguiente fórmula, más simplificada:

$$p(x) = f_1 + \sum_{i=2}^{n} \left(f[x_1, x_2, \ldots, x_n] \prod_{j=1}^{i-1} (x - x_j) \right)$$

f[1] debe ponerse fuera del sumatorio (porque en caso contrario sumaríamos varias veces el valor de f[1])

Algoritmo para la fórmula de Newton



EJERCICIO VISTO EN CLASE SOBRE DIFERENCIAS DIVIDIDAS

Realizar la tabla de diferencias divididas con los siguientes datos de tiempo y temperaturas:

Tiempo	1	5	8	14
Temperatura	10	20	50	-12

1	10	$f[1,5]=\frac{5}{2}$	$f[1,5,8]=\frac{15}{14}$	$f[1,5,8,14] = -0,26$
5	20	$f[5,8]=10$	$f[5,8,14]=\frac{-61}{27}$	
8	50	$f[8,14]=\frac{-31}{3}$		
14	-12			

*Aclaración sobre los cálculos de diferencias divididas:

$$f[1,5]=\frac{20-10}{5-1}=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$$

$$f[5,8]=\frac{50-20}{8-5}=\frac{30}{3}=10$$

$$f[8,14]=\frac{-12-50}{14-8}=\frac{-62}{6}=\frac{-31}{3}$$

$$f[1,5,8]=\frac{f[5,8]-f[1,5]}{8-1}=\frac{10-\frac{5}{2}}{7}=\frac{15}{14}$$

$$f[5,8,14]=\frac{f[8,14]-f[5,8]}{14-5}=\frac{\frac{-31}{3}-10}{9}=\frac{-61}{27}$$

$$f[1,5,8,14]=\frac{f[5,8,14]-f[1,5,8]}{14-1}=\frac{\frac{-61}{27}-\frac{15}{14}}{13}=-0,26$$