INTERPOLACIÓN POLINÓMICA DE LAGRANGE.
MÉTODO 3: DIFERENCIAS DIVIDIDAS / FÓRMULA DE NEWTON

Datos:
- Puntos soporte: $\{X_i\}_{i=1}^{n}$
- Valor de la función en los n puntos soporte: $\{f_i\}_{i=1}^{n}$
- i = (1,…n)

Formula de diferencias divididas
- General:

Diferencia dividida de orden n de f con soporte $\{x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+n-1}, x_{i+n}\}$

$$f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+n-1}, x_{i+n}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+n}] - f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+n-1}]}{x_{i+n} - x_i}$$

Chuleta a recordar (punto de vista del alumno)

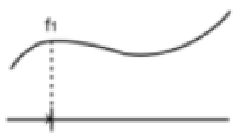
f [del 2º pto al últ] - f[del 1º pto al penúltimo]

(últ pto) - (primer pto)

- *Orden 0 : valores de la función en esos puntos*

f en x_1

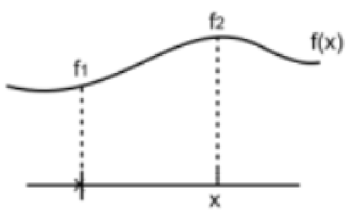
$$f[x_1] = f(x_1)$$



- *Orden 1*

f con soporte $\{x_1, x_2\}$

$$f[x_1, x_2] = \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1}$$



- *Orden 2*

f con soporte $\{x_1, x_2, x_3\}$

$$f[x_0,\ x_1,\ x_2] = \frac{f[x_1,\ x_2] - f[x_0,\ x_1]}{x_2 - x_0}$$

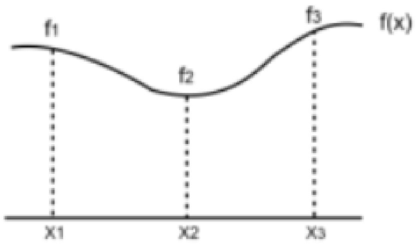


Tabla de diferencias divididas

x_1	f_1	$f[x_1, x_2] = \dfrac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1}$	$f[x_1, x_2, x_3] = \dfrac{f[x_2,\ x_3] - f[x_1,\ x_2]}{x_3 - x_1}$	$f[x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4]$
x_2	f_2	$f[x_2, x_3] = \dfrac{f_3 - f_2}{x_3 - x_2}$	$f[x_2, x_3, x_4] = \dfrac{f[x_3,\ x_4] - f[x_2,\ x_3]}{x_4 - x_2}$	
x_3	f_3	$f[x_3, x_4] = \dfrac{f_4 - f_3}{x_4 - x_3}$		
x_4	f_4			

$$* \ f[x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4] = \frac{f[x_2,\ x_3,\ x_4] - f[x_1,\ x_2,\ x_3]}{x_4 - x_1}$$

FÓRMULA DE NEWTON

El polinomio interpolador se puede obtener mediante la fórmula de Newton a partir de la tabla de diferencias divididas y sustituyendo con los valores proporcionados

Fórmula:

$$p(x) = f_1 + f[x_1, x_2](x - x_1) + f[x_1, x_2, x_3](x - x_1)(x - x_2) + f[x_1, x_2, x_3, x_4](x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) + \ldots\ f[x_1, x_2, \ldots, x_n](x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{n-1})$$

O de manera simplificada:

$$p(x) = f_1 + \sum_{i=2}^{n}\left(f[x_1, x_2, \ldots, x_n]\prod_{j=1}^{i-1}(x - x_j)\right)$$

Comprobación: $p(x_0) = f_0$; $p(x_1) = f_1$; $p(x_2) = f_2$; $p(x_i) = f_i$

Ejemplo: Obtener polinomio interpolador de Lagrange con soporte {-1,0,2,4}

x	-1	0	2	4
F(x)	2	4	1	-1

Tabla de diferencias dividas

$x_1 = -1 \quad f_1 = 2 \quad f[x_1, x_2] = \frac{4-2}{0-(-1)} = 2 \quad f[x_1, x_2, x_3] = \frac{-\frac{3}{2} - 2}{2-(-1)} = -\frac{7}{6}$

$x_2 = 0 \quad f_2 = 4 \quad f[x_2, x_3] = \frac{1-4}{2-0} = \frac{-3}{2} \quad f[x_2, x_3, x_4] = \frac{-1-(-\frac{3}{2})}{4-0} = \frac{1}{8}$ **

$x_3 = 2 \quad f_3 = 1 \quad f[x_3, x_4] = \frac{-1-1}{4-2} = -1$

$x_4 = 4 \quad f_4 = -1$

** $f[x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{\frac{1}{8} - (-\frac{7}{2})}{4-(-1)} = \frac{31}{120}$

P(x)= 2+2(x-(-1)) + (-7/6)(x-(-1))(x-0) + 31/120(x-(-1))(x-0)(x-2)=

2 + 2(x+1) - 7/6(x+1)x + 31/120(x+1)x(x-2)= 4 + $\frac{19x}{60}$ - $\frac{57x^2}{40}$ + $\frac{31x^3}{120}$

Comprobación:

$f_0 = p(x_0) = p(-1) = 2;\ f_1 = p(x_1) = p(0) = 4;\ f_2 = p(x_2) = p(2) = 1;\ f_3 = p(x_3) = p(4) = -1$

EJERCICIO

<u>Método 3</u>

X_0= -1 f_0= 2 → f[X_0,X_1] = (4-2)/(0-(-1))= 2

X_1= 0 f_1 =4 → f[X_1,X_2]= (1-4)/3-0 = -1 → f[X_0,X_1,X_2] = (-1-2)/ 3-(-1)= -3/4

X_2= 3 f_2= 1

P(x)= f_0 + f[X_0,X_1](x-X_0) + f[X_0,X_1,X_2](X-X_0)(X-X_1) =

2 + 2(x-(-1)) + (-3/4)(x-(-1))(x-0)=

2+ 2x + 2 -3/4(x^2+x)=

2+ 2x + 2 -3x^2/4- 3x/4 =

4 + 5x/4 – 3x^2/4