EJERCICIO

Interpolación por tramos de primer grado

Teniendo en cuenta los siguientes datos…

x	-1	0	1	4
F(x)	2	5	-3	-1

a) Determinar la función continua polinómica de 1er Grado a tramos que interpola la función mediante sistemas de ecuaciones, funciones de base de Lagrange y diferencias divididas

b) Obtener valor interpolado en x=2

a.1) Sistema de ecuaciones

Se requiere de dos puntos de soporte por cada polinomio al tratarse de grado 1, por lo que dividiremos el soporte en 3 sub-soportes de dos puntos.

$$\begin{cases} P_i(x_i) = a_i + b_i x_i = f_i \\ P_i(x_{i+1}) = a_i + b_i x_{i+1} = f_{i+1} \end{cases}$$

$$b_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i} \qquad a_i = f_i - \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i}$$

Para el intervalo [-1,0]

$$b_1 = \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} = \frac{5-2}{0-(-1)} = \frac{3}{1} = 3$$

$$a_1 = f_1 - \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} = \frac{f_1 x_2 - f_2 x_1}{x_2 - x_1} = \frac{0-(-5)}{0-(-1)} = \frac{5}{1} = 5$$

$P^{(1)}(x) = a_1 + b_1 x = 3+5x$

Para el intervalo [5,-3]

$$b_2 = \frac{f_3 - f_2}{x_3 - x_2} = \frac{(-3)-5}{1-0} = \frac{-8}{1} = -8$$

$$a_2 = f_2 - \frac{f_3 - f_2}{x_3 - x_2} = \frac{f_2 x_3 - f_3 x_2}{x_3 - x_2} = \frac{5-0}{1-0} = \frac{5}{1} = 5$$

$P^{(2)}(x) = a_2 + b_2 x = 5-8x$

Para el intervalo [-3,-1]

$$b_3 = \frac{f_4 - f_3}{x_4 - x_3} = \frac{(-1)-(-3)}{4-1} = \frac{2}{3}$$

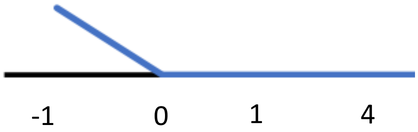
$$a_3 = f_3 - \frac{f_4 - f_3}{x_4 - x_3} = \frac{f_3 x_4 - f_4 x_3}{x_4 - x_3} = \frac{-12-(-1)}{4-3} = \frac{-11}{3}$$

$P^{(3)}(x) = a_3 + b_3 x = -11/3+2/3x$

$$u(x) \begin{cases} P_1(x), x \in [x_1, x_2] \\ P_2(x), x \in [x_2, x_3] \\ P_3(x), x \in [x_3, x_4] \end{cases}$$

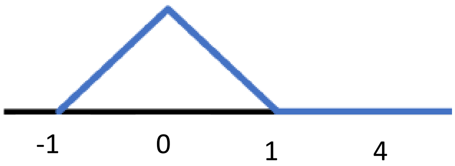
$$u(x) = \begin{cases} 5+3x, & x \in [-1,0] \\ 5-8x, & x \in [0,1] \\ \dfrac{-11+2x}{3}, & x \in [1,4] \end{cases}$$

a.2) Funciones de base + representación gráfica



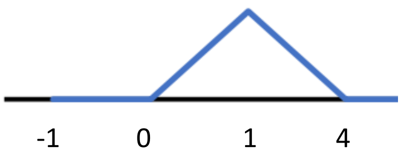
$$\varphi_1 = \begin{cases} \dfrac{x - x_2}{x_1 - x_2}, x \in [x_1, x_2] = \varphi_1^{(1)} \\ 0, x \notin [x_1, x_2] \end{cases}$$

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \frac{x-0}{-1-0} = \frac{x}{-1} = -x, \ x \in [-1,0] \\ 0, \ x \in [0,4] \end{cases}$$

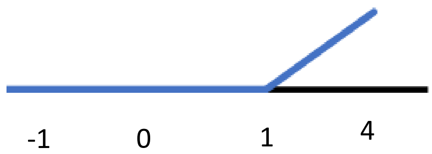


$$\varphi_i = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, x \in [x_{i-1}, x_i] = \varphi_i^{(1)} \\ \dfrac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}, x \in [x_i, x_{i+1}] = \varphi_i^{(2)} \\ 0, \quad x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}] \end{cases}$$

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} \varphi 2^{(1)}(x) = \frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{x-(-1)}{0-(-1)} = \frac{x+1}{1} = x+1; \ x \in [-1,0] \\ \varphi 2^{(2)}(x) = \frac{x-x_3}{x_2-x_3} = \frac{x-1}{0-1} = \frac{x-1}{-1} = -x+1; \ x \in [0,1] \\ 0; \quad x \in [1,4] \end{cases}$$



$$\varphi_3(x) = \begin{cases} \varphi 3^{(1)}(x) = \frac{x-x_2}{x_3-x_2} = \frac{x-0}{1-0} = \frac{x}{1} = x; \ x \in [0,1] \\ \varphi 3^{(2)}(x) = \frac{x-x_4}{x_3-x_4} = \frac{x-4}{1-4} = \frac{x-4}{-3} = \frac{-x+4}{3}; \ x \in [1,4] \\ 0; \quad x \in [-1,0] \end{cases}$$



$$\varphi_n = \begin{cases} \dfrac{x - x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}, x \in [x_{n-1}, x_n] = \varphi_n^{(1)} \\ 0, \quad x \notin [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

$$\varphi_4(x) = \begin{cases} \varphi 4^{(1)}(x) = \dfrac{x - x_3}{x_4 - x_3} = \dfrac{x-1}{4-1} = \dfrac{x-1}{3}, & x \in [1,4] \\ 0, & x \in [-1,1] \end{cases}$$

Para obtener el valor interpolado, simplemente tenemos que multiplicar el valor obtenido de la función de base de cada punto por el valor conocido que toma la función en dicho punto: $P_i(x) = f_i \cdot \varphi_i$

$$u(x) \begin{cases} f_1 * \varphi_1(x) + f_2 * \varphi 2^{(1)}(x); x \in [x_1, x_2] \\ f_2 * \varphi 2^{(2)}(x) + f_3 * \varphi 3^{(1)}(x); ; x \in [x_2, x_3] \\ f_3 * \varphi 3^{(2)}(x) + \varphi 4^{(1)}(x); x \in [x_3, x_4] \end{cases} \rightarrow u(x) \begin{cases} 2 * (-x) + 5 * (1 + x); x \in [-1,0] \\ 5 * (1 - x) + (-3) * (x); ; x \in [0,1] \\ (-3) * \frac{4-x}{3} + (-1) * \frac{x-1}{3}; x \in [1,4] \end{cases}$$

RESULTADO

$$u(x) = \begin{cases} 5 + 3x, & x \in [-1,0] \\ 5 - 8x, & x \in [0,1] \\ \dfrac{-11 + 2x}{3}, & x \in [1,4] \end{cases}$$

a.3) Diferencias divididas + fórmula de Newton

Se ha de recordar la diferencia dividida de orden 1 de una función f en los puntos $\{x_i, x_{i+1}\}$

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

Y aplicando la fórmula de Newton en diferencias divididas emplearíamos lo siguiente:

$$P^{(i)}(x) = f(x_i) + f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} (x - x_i)$$

$$P^{(1)}(x) = 2 + \frac{5-2}{0-(-1)}\big(x - (-1)\big) = 2 + 3(x+1) = 2 + 3x + 3 = 5 + 3x$$

$$P^{(2)}(x) = 5 + \frac{-3-5}{1-0}(x - 0) = 5 - 8(x) = 5 - 8x$$

$$P^{(3)}(x) = -3 + \frac{-1-(-3)}{4-1}(x - 1) = -3 + \frac{2}{3}(x-1) = \frac{-9+2x-4}{3} = \frac{-11+2x}{3}$$

$$u(x) = \begin{cases} 5 + 3x, & x \in [-1,0] \\ 5 - 8x, & x \in [0,1] \\ \dfrac{-11 + 2x}{3}, & x \in [1,4] \end{cases}$$

b) valor interpolado en x=2 → u(2)

2 ∈ [1,4] → (-11 + 2(2))/3 = -7/3