Interpolación polinómica de Lagrange

- OBJETIVO: estimar el valor de una función conocida de manera discreta (a partir de unos puntos de soporte) en otro punto.

MÉTODO 1: sistema de ecuaciones

$$\mathbf{f_i = P(x_i);} \qquad \mathbf{P(x) = a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + \ldots + a_n\, x^n} = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

- ✓ Con n puntos de soporte obtendremos un polinomio de grado = n
- ✓ Procedimiento: plantear el sistema de n ecuaciones con n+1 incógnitas (coeficientes a_k)

$$\begin{cases} f_0 = a_0 + a_1\, x_0 + a_2\, x_0 + \ldots + a_n\, x_0^n \\ f_1 = a_0 + a_1\, x_1 + a_2\, x_1^2 + \ldots + a_n\, x_1^n \\ f_n = a_0 + a_1\, x_n + a_2\, x_n^2 + \ldots + a_n\, x_n^n \end{cases}$$

- ✓ Plantear el polinomio fi = P(xi) con los coeficientes hallados
- ✓ Usarlo para estimar el valor de la función en cualquier punto

MÉTODO 2: polinomios de base de Lagrange

$$\mathbf{P(x)} = \sum_{i=1}^{n} f_i L_i(x)$$

- ✓ Con n puntos de soporte obtendremos un polinomio de grado = n-1, formado por n polinomios de base de Lagrange [$L_i(x)$] del mismo grado (n-1).
- ✓ f_i es el valor de la función conocido en los puntos de soporte
- ✓ L_i (x), polinomios de base, solo dependen del soporte y cumplen que la suma de todos ellos es igual a 1<
- ✓ $L_i\,(x) = \frac{x-x_1}{x_i-x_1} \cdot \frac{x-x_2}{x_i-x_2} \cdot (\ldots) \cdot \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} \cdot \frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}} \cdot (\ldots) \cdot \frac{x-x_n}{x_i-x_n} = \prod_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$
- ✓ Nunca $x_j = x_i$, porque si no el producto sería 0 -> Delta de Kronecker: $L_i\,(x_j) \begin{cases} = 1, \text{ si } i = j \\ = 0, \text{ si } i \neq j \end{cases}$

MÉTODO 3: diferencias divididas y fórmula de Newton

- ✓ Diferencias divididas expresadas a partir de otras de orden inferior (se van construyendo a partir de una tabla de columnas: x, f, diferencia dividida de orden 1, de orden 2, etc.
- ✓ Diferencia dividida de orden n:

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+n-1}, x_{i+n}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+n-1}, x_{i+n}] - f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+n-1}]}{x_{i+n} - x_i}$$

- ✓ Construimos el polinomio de grado n con la fórmula de Newton para la interpolación de Lagrange:
$$P(x) = f_i + f[x_i, x_{i+1}](x - x_i) + f[x_i, x_{i+1}, x_{i+n-1}](x - x_i)(x - x_{i+1}) + f[x_i, x_{i+1}, x_{i+n-1}, x_{i+n}\,](x - x_i)(x - x_{i+1})(x - i_{i+n-1}).$$
- ✓ Comprobación: si coincide el valor de polinomio en los puntos de soporte con los datos de la función en dichos puntos.