INTERPOLACION POR TRAMOS (PIECE WISE)

Cuando interpolamos un soporte con muchos puntos, el resultado es un polinomio de grado muy alto. Debido a esto, el polinomio es oscilante y generalmente erróneo.

Para obtener un polinomio mas exacto, aplicamos la interpolación por tramos, que consiste en dividir el soporte en pequeños subintervalos y calcular los polinomios de base en cada intervalo. Este método puede ser de primer grado y de segundo grado.

Cabe aclarar que esto no es un polinomio, si no en una función polinómica por tramos, por lo que tendrá la forma:

$$u(x)\begin{cases} P_1(x), x \in [x_1, x_2] \\ P_2(x), x \in [x_2, x_3] \\ P_3(x), x \in [x_3, x_4] \end{cases}$$

PRIMER GRADO

Se pueden obtener mediante un sistema de ecuaciones o mediante funciones de base

<u>Sistema de ecuaciones:</u>

La ecuación de una recta que une dos puntos de un se denomina $P_i(x)$, la cual une los puntos x_i y x_{i+1}. Como la ecuación es de primer grado, queda de la forma:

$$P_i(x) = a_i + b_i x$$

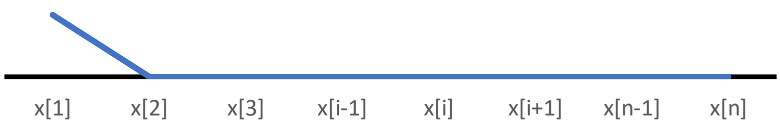
Para obtener $P_i(x)$ se realiza un sistema de ecuaciones con valores conocidos para x y f

$$\begin{cases} P_i(x_i) = a_i + b_i x_i = f_i \\ P_i(x_{i+1}) = a_i + b_i x_{i+1} = f_{i+1} \end{cases}$$

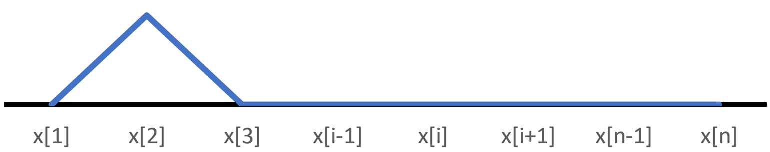
$$b_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i} \qquad a_i = f_i - \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i}$$

<u>Funciones de base:</u>

Son equivalentes a los polinomios de base, se debe tomar como valor 1 si el valor interpolado coincide con el punto del soporte para el cual estamos calculando la función, mientras los otros puntos del soporte tomaran valor 0.

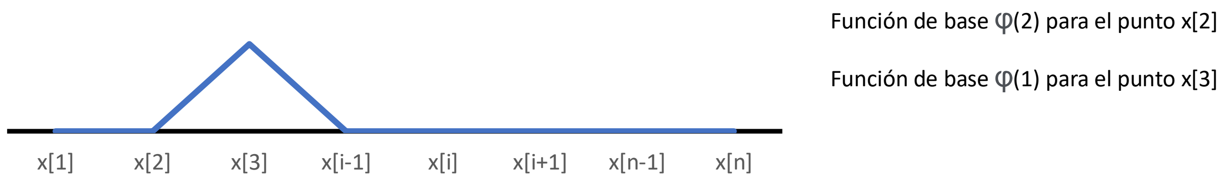


Función de base ρ(1) para el punto x[1]



Función de base ρ(2) para el punto x[1]

Función de base ρ(1) para el punto x[2]



Para el primer punto, la función seria:

$$\varphi_1 = \begin{cases} \dfrac{x - x_2}{x_1 - x_2}, x \in [x_1, x_2] = \varphi_1^{(1)} \\ \quad 0, x \notin [x_1, x_2] \end{cases}$$

Para un punto intermedio:

$$\varphi_i = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, x \in [x_{i-1}, x_i] = \varphi_i^{(1)} \\ \dfrac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}, x \in [x_i, x_{i+1}] = \varphi_i^{(2)} \\ \quad 0, \quad x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}] \end{cases}$$

Para el último punto:

$$\varphi_n = \begin{cases} \dfrac{x - x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}, x \in [x_{n-1}, x_n] = \varphi_n^{(1)} \\ \quad 0, \quad x \notin [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

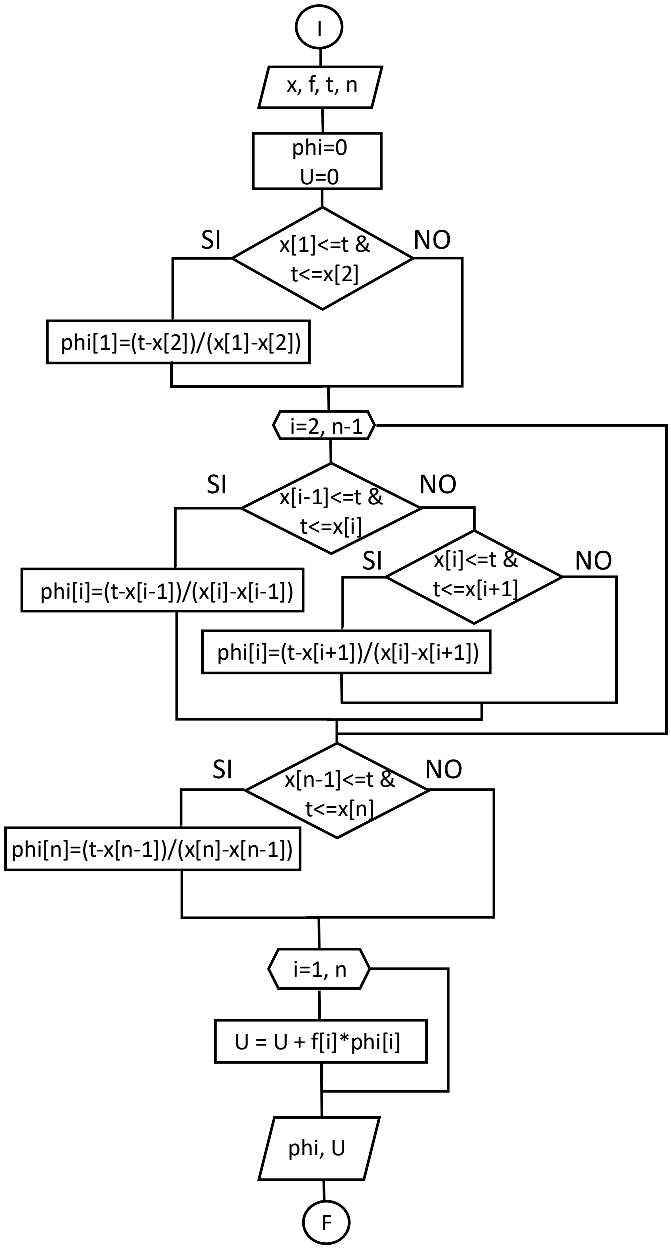
Para obtener el valor interpolado, simplemente tenemos que multiplicar el valor obtenido de la función de base de cada punto por el valor conocido que toma la función en dicho punto:

$$P_i(x) = f_i \cdot \varphi_i$$

La función interpoladora para los puntos (x[1], x[2], x[3], x[i-1], x[i], x[i+1], x[n-1], x[n]) seria:

$$u(x) \begin{cases} f_1 \cdot \varphi_1^{(1)}(x) + f_2 \cdot \varphi_2^{(1)}(x), & x \in [S_1, S_2] \\ f_2 \cdot \varphi_2^{(2)}(x) + f_3 \cdot \varphi_3^{(1)}(x), & x \in [S_2, S_3] \\ f_3 \cdot \varphi_3^{(2)}(x) + f_{i-1} \cdot \varphi_{i-1}^{(1)}(x), & x \in [S_3, S_{i-1}] \\ f_{i-1} \cdot \varphi_{i-1}^{(2)}(x) + f_i \cdot \varphi_i^{(1)}(x), & x \in [S_{i-1}, S_i] \\ f_i \cdot \varphi_i^{(2)}(x) + f_{i+1} \cdot \varphi_{i+1}^{(1)}(x), & x \in [S_i, S_{i+1}] \\ f_{n-1} \cdot \varphi_{n-1}^{(2)}(x) + f_n \cdot \varphi_n^{(1)}(x), & x \in [S_{n-1}, S_n] \end{cases}$$

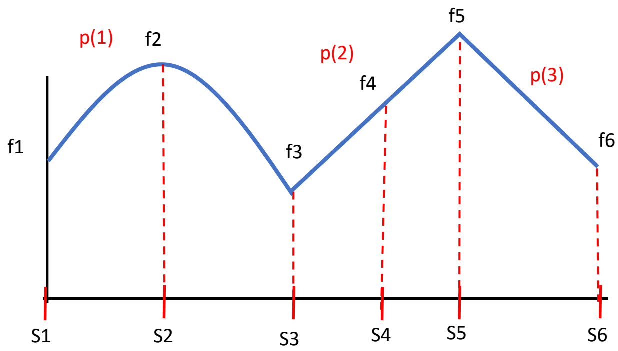
ALGORITMIA PARA INTERPOLACION POR TRAMOS DE PRIMER GRADO



SEGUNDO GRADO

Se puede subdividir el soporte en una colección de sub-soportes e interpolar en cada uno de ellos. En este caso dividiremos el soporte en intervalos de 3 puntos y las funciones de base tendrán grado 2 (parábolas).

El número de subintervalos se calcula como (n-1)/2, por lo que es necesario tener un numero impar de puntos de soporte. Si el numero es par, se puede hacer un polinomio de grado 1 (recta) para los últimos puntos.



Sistema de ecuaciones:

$p^{(1)}(x)=a_1+b_1x+c_1x^2$

$$\left.\begin{array}{l} a_1+b_1S_1+c_1S_1^2=f_1 \\ a_1+b_1S_2+c_1S_2^2=f_2 \\ a_1+b_1S_3+c_1S_3^2=f_3 \end{array}\right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & S_1 & S_1^2 \\ 1 & S_2 & S_2^2 \\ 1 & S_3 & S_3^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$$

$p^{(2)}(x)=a_2+b_2x+c_2x^2$

$$\left.\begin{array}{l} a_2+b_2S_3+c_2S_3^2=f_3 \\ a_2+b_2S_4+c_2S_4^2=f_4 \\ a_2+b_2S_5+c_2S_5^2=f_5 \end{array}\right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & S_3 & S_3^2 \\ 1 & S_4 & S_4^2 \\ 1 & S_5 & S_5^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{pmatrix}$$

$p^{(3)}(x)=a_3+b_3x$

$$\left.\begin{array}{l} a_3+b_3S_5=f_5 \\ a_3+b_3S_6=f_6 \end{array}\right\}$$

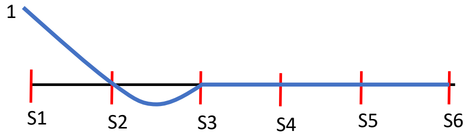
$$\begin{pmatrix} 1 & S_5 \\ 1 & S_6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_5 \\ f_6 \end{pmatrix}$$

$$u(x) = \begin{cases} p^{(1)}(x)\,, x \in [S_1, S_3] \\ p^{(2)}(x)\,, x \in [S_3, S_5] \\ p^{(3)}(x)\,, x \in [S_5, S_6] \end{cases}$$

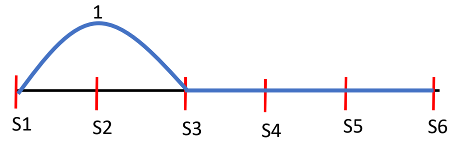
Funciones de base

Las funciones de base cumplen las mismas condiciones que en el primer grado: tienen valor 1 en el punto de soporte al que están asociadas y 0 en el resto de puntos del soporte. Según la posición del valor t que queremos interpolar, tendrá un valor para varios phi, por ejemplo si esta en el intervalo [S_1, S_3], tendrá un valor para phi[1], phi[2] y phi[3].

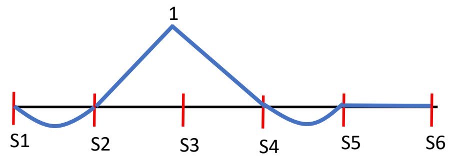
$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \dfrac{(x - S_2)(x - S_3)}{(S_1 - S_2)(S_1 - S_3)}, & x \in [S_1, S_3] \\ 0, & x \notin [S_1, S_3] \end{cases}$$



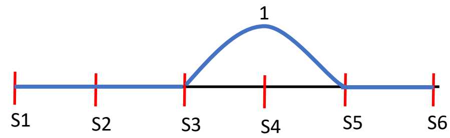
$$\varphi_2(x) = \begin{cases} \dfrac{(x - S_1)(x - S_3)}{(S_2 - S_1)(S_2 - S_3)}, & x \in [S_1, S_3] \\ 0, & x \notin [S_1, S_3] \end{cases}$$



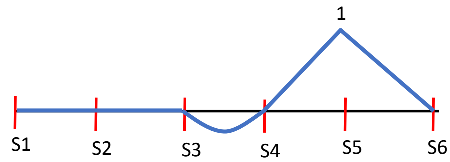
$$\varphi_3(x) = \begin{cases} \dfrac{(x - S_1)(x - S_2)}{(S_3 - S_1)(S_3 - S_2)}, & x \in [S_1, S_3] \\ \dfrac{(x - S_4)(x - S_5)}{(S_3 - S_4)(S_3 - S_5)}, & x \in [S_3, S_5] \\ 0, & x \in [S_5, S_6] \end{cases}$$



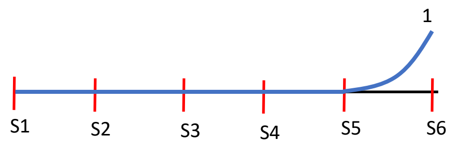
$$\varphi_4(x) = \begin{cases} \dfrac{(x - S_3)(x - S_5)}{(S_4 - S_3)(S_4 - S_5)}, & x \in [S_3, S_5] \\ 0, & x \notin [S_3, S_5] \end{cases}$$



$$\varphi_5(x) = \begin{cases} \dfrac{(x - S_3)(x - S_4)}{(S_5 - S_3)(S_5 - S_4)}, & x \in [S_3, S_5] \\ \dfrac{(x - S_6)}{(S_5 - S_6)}, & x \in [S_5, S_6] \\ 0, & x \notin [S_3, S_6] \end{cases}$$



$$\varphi_6(x) = \begin{cases} \dfrac{(x - S_5)}{(S_6 - S_5)}, & x \in [S_5, S_6] \\ 0, & x \notin [S_5, S_6] \end{cases}$$



ALGORITMO INTERPOLACION POR TRAMOS DE SEGUNDO GRADO