Fórmulas de derivación numérica de tipo interpolatorio

Antes de explicar a fondo cuáles son los diferentes métodos de derivación, es necesario saber algunos conceptos básicos sobre derivación.

Cómo seguramente se haya estudiado en matemáticas, sabemos que la derivada de una función en un punto cualquiera (x*) es:

$$f'(x^*) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x^* + h) - f(x^*)}{h}$$

Sin embargo, en los ejercicios que realizaremos la función no está definida para todo R, sino que depende de nuestro soporte ($\{s_0, s_1, \ldots, s_n\}$) y, además, solo está evaluada para ese soporte; por lo que nuestra h mínima viene dada por la granulidad de nuestro soporte.

La granulidad es la distancia o separación entre los puntos del soporte. Si los puntos están muy cercanos entre sí, la granularidad será alta, es decir, el nivel de detalle será muy fino. Si los puntos están más distantes, la granularidad será baja, lo que indica un nivel de detalle más grueso o menos preciso. Por esta razón, si los valores del soporte están más cercanos entre sí, la granularidad es alta y el valor mínimo de h será pequeño, reflejando una mayor aproximación en el cálculo o análisis que se está realizando.

Además, cuantas más veces cruza una función por 0, la función presenta una frecuencia máxima mayor, por lo que a la hora de calcular su pendiente, es decir, la derivada se calculan con más error, por lo que estos métodos, no son del todo buenos para todas las funciones.

Entonces, la fórmula que se nos queda para calcular la derivada en el soporte es:

$$\underbrace{f'_{x^*}}_{\text{Fórmula de derivación numérica que aproxima a } f'(x^*)} = \frac{f(x^* + h) - f(x^*)}{h}$$

Fórmula de derivación numérica (FDN): sirve para aproximar la derivada k-ésima de una función sobre un punto cualquiera contenido en el soporte (x*) sobre el soporte $\{s_0, s_1, \ldots s_n\}$. Su expresión es:

Coeficientes o pesos (dependen del soporte)

$$f^{(k}(x^*) \approx f_{x^*}^{(k} = \underbrace{\sum_{i=0}^{n} c_i \cdot f(s_i)}_{\text{Ponderación}}$$

A partir de esta fórmula podemos deducir, que, si tenemos el mismo soporte para dos funciones distintas, los coeficientes (que son escalares) nos sirven para calcular las derivadas de estas dos funciones distintas, ya que estos no cambian al depender del soporte. Lo único que cambiaría son los $f(s_i)$.

Métodos de derivación:

Hay tres métodos para calcular la derivada de una función:

- Derivando el polinomio interpolador:

Una vez que conocemos el polinomio interpolador de Lagrange que aproxima una función, podemos calcular la derivada de dicha función calculando la derivada del polinomio interpolador.

En estos casos, la precisión de la derivada depende del grado interpolador (generalmente, a mayor grado mayor precisión, aunque si también se pueden producir problemas numéricos que pueden ocurrir con polinomios de alto grado) y también va a depender de la función f(x): algunas funciones pueden ser suaves y bien comportadas, lo que hace que su derivada sea fácil de aproximar con alta precisión, incluso con polinomios de bajo grado. Sin embargo, otras funciones pueden ser más complicadas, como aquellas con discontinuidades, puntos angulosos o funciones altamente oscilantes. En estos casos, la precisión de la derivada puede ser más difícil de alcanzar, incluso si se usa un polinomio de alto grado. Por lo tanto, la precisión depende de las características de f(x) como suavidad, continuidad, etc.

Otro rasgo característico del polinomio interpolador de Lagrange es que la función en el soporte es igual al polinomio en el soporte, es decir, $f(s_i)=p(s_i)$. No obstante, esto no se cumple con

$$f'(x) \approx p'(x) \text{ y } f^{(k}(x) \approx p^{(k}(x)$$

las derivadas. No se puede asegurar que $f^{(k}(s_i) = p^{(k}(s_i)$ (solo es cierto si la función es un polinomio).

- Aplicando Lagrange

Para calcular una fórmula de derivación numérica de tipo interpolatorio (FDNTI) hay que calcular los coeficientes del polinomio interpolador de derivación a partir del polinomio de base de Lagrange.

$$f^{(k}(x^*) \approx \sum_{i=0}^{n} c_i \cdot f(s_i)$$

Recordamos que el polinomio de Lagrange se calcula con las siguientes fórmulas. (En caso de no entenderlas o querer repasarlas, se puede hacer en otro de nuestros recursos en la página web o en la página del trabajo cooperativo)

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} f(s_i)\mathrm{L}_i(x), \qquad \text{siendo} \qquad \mathrm{L}_i(x) = \prod_{\substack{0\le j\le n \\ j\neq i}} \frac{x - s_j}{s_i - s_j}$$

Si comparamos ambas fórmulas llegamos a la conclusión que los coeficientes equivalen a la derivada k-ésima de las bases de Lagrange, por lo que tenemos que derivar las bases y después calcular el valor de los coeficientes sustituyendo el punto en el que queremos calcular la derivada (x*)

Además, siempre se cumple que los coeficientes de una FDNTI sumen 0, es decir:

$$\sum_{i=0}^{n} c_i = 0$$

$$c_i = \mathrm{L}_i^{(k}(x^*)$$

Esta propiedad es fundamental y nos sirve para comprobar en los ejercicios que no nos hemos confundido al realizar los cálculos.

Como estamos calculando una aproximación de la derivada, generalmente va a tener asociado algún error, por pequeño y despreciable que sea. Este error se denomina error de truncamiento y se puede calcular mediante la fórmula:

$$R_f(x^*) = f^{(k}(x^*) - f_{x^*}^{(k}$$

Hay que tratar de minimizar el error de truncamiento para que el cálculo sea lo más aproximado posible en todo el soporte.

Sin embargo, podemos calcular una fórmula de derivación numérica exacta. Esto se cumple para cualquier punto del soporte (x*) cuando $R_f(x^*) = 0$ y siempre y cuando el grado de la función sea menor o igual que el grado del polinomio, ya que de lo contrario si derivamos el polinomio nos va a dar 0, mientras que la derivada de la función continúa teniendo un valor distinto de 0, por lo que no obtengo un valor de truncamiento nulo.

Teorema de la exactitud de las fórmulas de derivación numérica:

La condición necesaria y suficiente para que una fórmula de derivación numérica construida sobre un soporte de (nn+1) puntos {$s_0 < s_1 < s_2 < \ldots < s_n$} sea exacta al menos de orden n es que sea una fórmula de tipo interpolatorio, es decir, que la propia función sea un polinomio de grado menor al de su polinomio interpolador.

La demostración de este teorema es:

Si $f(x) = p_n(x)$ para el intervalo $[s_0, s_1]$ (esto implica que el grado de $f(x) \leq n$)

$$f(x) = p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(s_i)\mathrm{L}_i(x) \qquad f^{(k}(x^*) = \sum_{i=0}^{n} \mathrm{L}_i^{(k}(x) f(s_i) = \sum_{i=0}^{n} c_i f(s_i) = f_{x^*}^{(k}$$

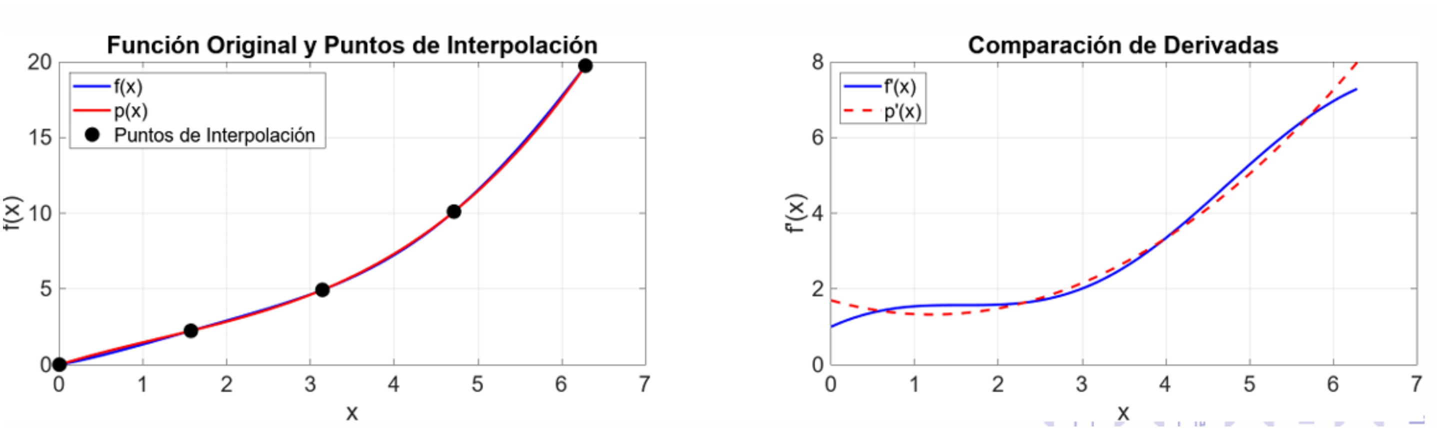
Por tanto, $R_f(x) = 0$ para $x \in [s_0, s_n]$.

Para demostrar esto gráficamente ponemos dos ejemplos, uno sobre una función de grado infinito, que no cumple nuestra condición y, por tanto, presenta un error de truncamiento distinto de 0 y no despreciable y otro caso de una función polinómica que tiene por lo menos un grado menos que el polinomio interpolador y que posee un error de truncamiento nulo.

La primera función de grado infinito (debido al coseno que es una función trigonométrica que siempre sigue teniendo derivada) es:

$$f(x) = \sin(x) + 0.5x^2 \qquad f'(x) = \cos(x) + x$$

Mientras que si representamos en la gráfica una función de grado 4, teniendo 5 puntos en el soporte, la derivada coincide como podemos ver claramente en la siguiente gráfica:



Se puede apreciar claramente, como en la primera gráfica ambas funciones son iguales (f'(x) = p' (x)). Mientras que en la segunda gráfica que representa la función de grado infinito, la derivada calculada mediante la FDNTI tiene un gran error para aquellos puntos que no pertenecen al soporte.

- Aplicando Newton

Al realizar la derivación usando el método de Newton obtenemos el mismo resultado que hemos obtenido en el método de Lagrange, ya que en ambos casos estamos derivando el mismo polinomio interpolador calculado de distinta manera.

En este caso, la fórmula para calcular la derivada será:

$$f(x) \approx p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f[s_0, s_1, \dots, s_i] \prod_{j=0}^{i-1} (x - s_j)$$

El método para calcular la derivada por Newton, es el mismo que para calcular el polinomio, ya que primero tenemos que calcular el polinomio interpolador y luego integrarlo. A diferencia que con Lagrange, que calculamos directamente la derivada dividiendo las bases de Lagrange; en este método tenemos que calcular el polinomio interpolador con las diferencias divididas y el soporte (como muestra la fórmula de la figura de arriba) y una vez calculado, lo derivaremos tantas veces como necesitemos hasta llegar a k.

Sin embargo, de esta manera no obtenemos una relación de la siguiente forma:

$$f^{(k}(x^*) \approx \sum_{i=0}^{n} c_i \cdot f(s_i)$$

0 0

Por lo tanto, nos preguntamos: ¿qué relación existe entre el polinomio interpolatorio expresado mediante base de Newton y los coeficientes c_i?

Su relación va a depender del número de puntos que tenga el soporte.

Con dos puntos en el soporte:

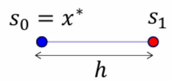
Si solo tenemos dos puntos en el soporte solo vamos a poder calcular un polinomio de grado 1, ya que el grado es n-1, siendo n el número de puntos en el soporte. Por lo tanto, solo vamos a ser capaces de calcular la primera derivada, ya que la derivada de una constante es 0.

$$p(x) = f[s_0] + f[s_0, s_1](x - s_0)$$

$$f'(x^*) \approx p'(x^*) = f[s_0, s_1] = \frac{f[s_1]-f[s_0]}{s_1-s_0}$$

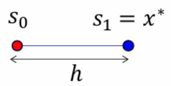
Dependiendo de cómo estén los puntos del soporte en relación al punto donde queremos calcular la derivada (x*), obtenemos diferentes versiones de la aproximación de las derivadas discretas.

- $s_0 = x^*$ y $s_1 = x^* + h$



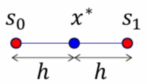
$$f'(x^*) \approx p'(x^*) = f[s_0, s_1] = \frac{f(x^*+h) - f(x^*)}{h}$$ **Diferencia finita hacia adelante**

- $s_0 = x^* - h$ y $s_1 = x^*$



$$f'(x^*) \approx p'(x^*) = f[s_0, s_1] = \frac{f(x^*) - f(x^*-h)}{h}$$ **Diferencia finita hacia atrás**

- $s_0 = x^* - h$ y $s_1 = x^* + 1$



$$f'(x^*) \approx p'(x^*) = f[s_0, s_1] = \frac{f(x^*+h) - f(x^*-h)}{2h}$$ **Diferencia finita centrada**

Con tres puntos en el soporte:

Si tenemos tres puntos en el soporte $\{s_0,s_1,s_2\}$, podremos calcular el polinomio interpolatorio de grado 2, por lo que podremos calcular la primera y segunda derivada.

$$p(x) = \cancel{f[s_0]} + \cancel{f[s_0, s_1](x - s_0)} + f[s_0, s_1, s_2](x - s_0)(x - s_1)$$

$$f''(x^*) \approx p''(x^*) = 2f[s_0, s_1, s_2]$$

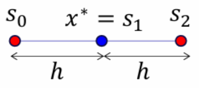
En la imagen anterior, lo que está tachado indica lo que vale 0 al hacer la segunda derivada, no lo que vale 0 en el polinomio.

La primera derivada sería:

$$f'(x*) \approx p'(x*) = f[s0, s1] + 2f[s0, s1, s2][(2x*)\text{- (s0-s1)}]$$

Para calcular la segunda derivada para dos puntos en el soporte, si el punto donde queremos calcular la derivada está centrado en el soporte, la segunda derivada valdría:

- $s_0 = x^* - h\ ,\ s_1 = x^*, s_2 = x^* + h$



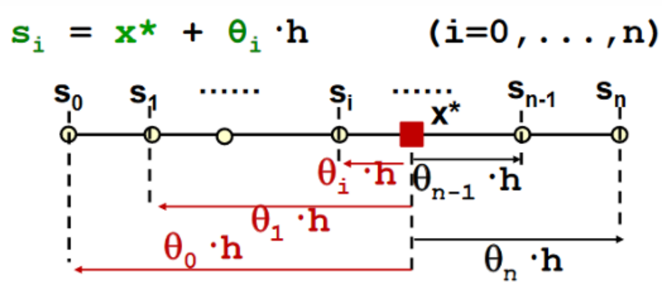
$$f''(x^*) \approx p''(x^*) = 2f[s_0, s_1, s_2] = \frac{f(x^* + h) - 2f(x^*) + f(x^* - h)}{h^2}$$

- Mediante expansión de Taylor:

Recordamos que el polinomio de Taylor sirve para aproximar una función compleja por un polinomio de manera que el polinomio coincida con la función y sus derivadas en un punto dado, sigue la siguiente fórmula:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(k}(a)}{k!}(x-a)^k + \cdots$$

Para poder calcular la derivada a partir del polinomiode Taylor necesitamos representar la nube de puntos (es decir, los puntos que están dentro del soporte) como desplazamientos de h, siendo h una longitud característica y conocida. Para ello ponderamos θ_i, tales que $s_i = x^* + \theta_i h$, siendo x* el número sobre el que quiero calcular la derivada (a = x*).



Para cada punto del soporte nosotros podemos calcular el polinomio de Taylor sustituyendo las a =x* y las x por $s_i = x^* + \theta_i h$, obteniendo la fórmula:

Pero como lo que nosotros lo que queremos es obtener una fórmula que siga la expresión:

$$f^{(k}(x^*) \approx \sum_{i=0}^{n} c_i \cdot f(s_i)$$

$$f(s_i) = f(x^* + \theta_i h) = f(x^*) + f'(x^*)(\theta_i h) + \frac{f''(x^*)}{2!}(\theta_i h)^2 + \cdots + \frac{f^{(k}(x^*)}{k!}(\theta_i h)^k + \cdots$$

Obligamos a que esta aproximación sea exacta, es decir, sustituimos el ≈, por un =. Para ello sustituimos la $f(s_i)$ por su respectivo polinomio de Taylor; cuyo desarrollo terminaría en el grado de la función, ya que al ser infinita hay que ponerle un límite. Como estamos calculando la derivada k-ésima de una función, para poder calcularla vamos a forzar que todos los términos se anulen (ya que los coeficientes de las derivadas que no me interesan queremos que sea un número tal que el sumatorio valga 0), salvo el término k-ésimo (que es el que nos interesa), que equivaldría con la derivada que queremos calcular. De esta manera obtenemos un sistema de ecuaciones de n+1 incognitas que nos permite calcular los coeficientes (c_i):

$$\sum_{i=0}^{n} c_i = 0 \qquad \sum_{i=0}^{n} c_i(\theta_i h) = 0 \qquad \sum_{i=0}^{n} c_i(\theta_i h)^2 = 0 \qquad \cdots \qquad \sum_{i=0}^{n} c_i(\theta_i h)^k = k! \qquad \cdots$$

$$\overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \theta_0 & \theta_1 & \theta_2 & & \theta_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_0^{k-1} & \theta_1^{k-1} & \theta_2^{k-1} & \cdots & \theta_n^{k-1} \\ \theta_0^{k} & \theta_1^{k} & \theta_2^{k} & \cdots & \theta_n^{k} \\ \theta_0^{k+1} & \theta_1^{k+1} & \theta_2^{k+1} & \cdots & \theta_n^{k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_0^{n} & \theta_1^{n} & \theta_2^{n} & \theta_n^{n} & \theta_n^{n} \end{bmatrix}}^{(n+1)\times(n+1),\ \text{dependiente de las posiciones del soporte}} \overbrace{\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{k-1} \\ c_k \\ c_{k+1} \\ \vdots \\ c_1 \end{bmatrix}}^{(n+1)\ \text{coefientes}} = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ k! \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \frac{1}{h^k}}^{(n+1)\ \text{dependiente de k y h}}$$

Resolviendo el sistema obtenemos los coeficientes y con la siguiente fórmula podremos calcular la derivada k-ésima:

$$f^{(k} \approx \sum_{i=0}^{n} c_i \frac{f^k(x^*)}{k!}(\theta_i h)^\wedge k$$

Para poner en práctica la teoría que acabamos de ver vamos a hacer algunos ejercicios.

Ejercicio 1: De una función $f(x)$ se conocen los siguientes valores:

s_k	0	1/2	3/2	2
$f(s_{k)}$	-1	0	5	9

y se desea interpolarla en el sentido de Lagrange con un polinomio de grado igual o menor que tres.

Se pide: Calcular los polinomios de la base de Lagrange y los coeficientes de una fórmula de derivación numérica que permita aproximar, con dicho soporte, el valor de $f'(1)$.

Para poder calcular el polinomio interpolador que nos permita aproximar la derivada de la función para x =1, necesitamos calcular las bases de Lagrange. Su fórmula es:

$$\mathrm{L}_i(x) = \prod_{\substack{0 \le j \le n \\ j \ne i}} \frac{x - s_j}{s_i - s_j}$$

Sustituimos los datos del problema en la fórmula para obtener las bases de Lagrange:

$$\mathrm{L}_0(x) = \left(\frac{x-\frac{1}{2}}{0-\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{x-\frac{3}{2}}{0-\frac{3}{2}}\right)\left(\frac{x-2}{0-2}\right) = \frac{1}{6}(6 - 19x + 16x^2 - 4x^3)$$

$$\mathrm{L}_1(x) = \left(\frac{x-0}{\frac{1}{2}-0}\right)\left(\frac{x-\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}\right)\left(\frac{x-2}{\frac{1}{2}-2}\right) = \frac{1}{3}(12x - 14x^2 + 4x^3)$$

$$\mathrm{L}_2(x) = \left(\frac{x-0}{\frac{3}{2}-0}\right)\left(\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{x-2}{\frac{3}{2}-2}\right) = \frac{1}{3}(-4x + 10x^2 - 4x^3)$$

$$\mathrm{L}_3(x) = \left(\frac{x-0}{2-0}\right)\left(\frac{x-\frac{1}{2}}{2-\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{x-\frac{3}{2}}{2-\frac{3}{2}}\right) = \frac{1}{6}(3x - 8x^2 + 4x^3)$$

Como sabemos que la derivada de una función para un punto cualquiera del soporte, x*, es y sabemos que la derivada de la función es aproximadamente la derivada del polinomio interpolador, sabemos que los coeficientes equivalen a la derivada de las bases de Lagrange. Por ello, calculamos su derivda y después sustituimos para el valor de x*, que en este caso es 1:

$$\mathrm{L'}_0(x) = \frac{1}{6}(-19 + 32x - 12x^2) \rightarrow c_0 = \mathrm{L'}_0(1) = \frac{1}{6}$$

$$\mathrm{L'}_1(x) = \frac{1}{6}(12 - 28x - 12x^2) \rightarrow c_1 = \mathrm{L'}_1(1) = -\frac{4}{3}$$

$$\mathrm{L'}_2(x) = \frac{1}{3}(-4 + 20x - 12x^2) \rightarrow c_2 = \mathrm{L'}_2(1) = \frac{4}{3}$$

$$\mathrm{L'}_3(x) = \frac{1}{6}(3 - 16x + 12x^2) \rightarrow c_3 = \mathrm{L'}_3(1) = -\frac{1}{6}$$

Ya tendríamos nuestros coeficientes calculados. Para comprobar que estén bien, su suma debe dar 0:

$c_0 + c_1 + c_2 + c_3 = 1/6 - 4/3 + 4/3 - 1/6 = 0$

Como se cumple, están bien.

Solo faltaría calcular la derivada de la función, sustituyendo en su fórmula, es decir, solo falta multiplicar cada coeficiente con su f(s) correspondiente y sumarlos:

$$f'(1) \approx \frac{1}{6} f(0) - \frac{4}{3} f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{4}{3} f\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{1}{6} f(2) = 5$$

Además, este ejercicio, si no nos lo pidieran resolver por las bases de Lagrange, también se podría resolver siguiendo el método de Newton:

En este caso, primero tendríamos que calcular el polinomio interpolador a través de las diferencias divididas, luego tendríamos que derivar ese polinomio y sustituyendo el valor de nuestra x* (en este caso 1) en la derivada del polinomio, obtendríamos una aproximación de la derivada de la función.

Primero tenemos que calcular el polinomio (si hubiera dudas de cómo se realiza, recomendamos ver el recurso de la página que se encarga de explicar este tema). Lo podemos hacer con la tabla o sin ella. Nosotros lo vamos a resolver con la tabla:

$$\begin{aligned} p_n(x) = {} & f[s_0] + f[s_0, s_1](x - s_0) + f[s_0, s_1, s_2](x - s_0)(x - s_1) \ldots \\ & + f[s_0, s_1, s_2, s_3](x - s_0)(x - s_1)(x - s_2) + \cdots \\ & + f[s_0, s_1, s_2, s_3, s_4](x - s_0)(x - s_1)(x - s_2)(x - s_3) + \cdots \end{aligned}$$

$$f[s_0, s_1, s_2, \cdots, s_n] = \frac{f[s_1, s_2, \cdots, s_n] - f[s_0, s_1, s_2, \cdots, s_{n-1}]}{s_n - s_0}$$

$s_0 = 0$	$f[s_0] = -1$	$f[s_0, s_1] = \frac{0+1}{\frac{1}{2} - 0} = 2$	$f[s_0, s_1, s_2] = \frac{5-2}{\frac{3}{2} - 0} = 2$	$f[s_0, s_1, s_2, s_3] = \frac{2-2}{2-0} = 0$
$s_1 = \frac{1}{2}$	$f[s_1] = 0$	$f[s_1, s_2] = \frac{5-0}{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}} = 5$	$f[s_1, s_2, s_3] = \frac{8-5}{2 - \frac{1}{2}} = 2$	
$s_2 = \frac{3}{2}$	$f[s_2] = 5$	$f[s_2, s_3] = \frac{9-5}{2 - \frac{3}{2}} = 8$		
$s_3 = 2$	$f[s_3] = 9$			

$$\begin{aligned} p(x) &= \\ &= -1 + 2x + 2x\left(x - \frac{1}{2}\right) + 0 \\ &\cdot x\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right) \\ &= -1 + x + 2x^2 \end{aligned}$$

$$p'(x) = 1 + 4x$$

$$\boxed{f'(1) \approx 5}$$

Como podemos ver, el resultado en ambos casos es el mismo, por lo que a la hora de calcular la aproximación de la derivada, da igual el método que se utilice, porque siempre y cuando los cálculos sean correctos, el resultado va a ser el mismo.

Aun así, si resolvemos el problema siguiendo la fórmula de Newton, no obtenemos los coeficientes indeterminados, que en algunos casos nos lo puede pedir el problema, así que antes de hacer el ejercicio, lo mejor es leer con detenimiento lo que nos pregunta, y dependiendo de eso, utilizaremos una forma u otra.

Ejercicio 2: Se considera la función $f(x) = \ln(1 + x)$ y la fórmula de derivación numérica para aproximar la primera derivada de la función $f(x)$ en el punto 6.5:

$f'(6.5) \approx c_0\, f(6) + c_1\, f(7) + c_2\, f(8) + c_3\, f(9)$

¿Qué valores deben tomar los coeficientes c_0, c_1, c_2 y c_3 para que la expresión anterior se corresponda con una fórmula de derivación de tipo interpolatorio?

En este ejercicio, no nos dice que método tenemos que utilizar, pero como nos pide calcular los coeficientes de derivación, sabemos que no podemos utilizar el método de Newton, ya que este no nos dice esa información.

Para poder calcular los coeficientes podemos utilizar dos formas: Lagrange o el método de los coeficientes indeterminados. Lo vamos a resolver por los dos métodos:

Siguiendo el método de Lagrange, sabemos que los coeficientes equivalen a la derivada, en este caso, primera de las bases de Lagrange para x = 6.5 (que es el punto donde queremos calcular la derivada, es decir, nuestro x*). Entonces calculamos las bases y sus respectivas derivadas evaluadas para x = 6.5

Para poder calcular las bases de Lagrange necesitamos conocer el soporte, que nos lo da el enunciado de manera indirecta. El soporte es S= {6,7,8,9}, ya que son los puntos que se utilizan para calcular la derivada.

$$\mathrm{L}_0(x) = \frac{(x-7)(x-8)(x-9)}{(6-7)(6-8)(6-9)} = -\frac{x^3}{6} + 4x^2 - \frac{191}{6}x + 84 \quad \rightarrow \quad c_0 = \mathrm{L}_0'(6.5) = -\frac{23}{24}$$

$$\mathrm{L}_1(x) = \frac{(x-6)(x-8)(x-9)}{(7-6)(7-8)(7-9)} = \frac{x^3}{2} - \frac{23}{2}x^2 + 87x - 216 \quad \rightarrow \quad c_1 = \mathrm{L}_1'(6.5) = \frac{7}{8}$$

$$\mathrm{L}_2(x) = \frac{(x-6)(x-7)(x-9)}{(8-6)(8-7)(8-9)} = -\frac{x^3}{2} + 11x^2 - \frac{159}{2}x + 189 \quad \rightarrow \quad c_2 = \mathrm{L}_2'(6.5) = \frac{1}{8}$$

$$\mathrm{L}_3(x) = \frac{(x-6)(x-7)(x-8)}{(9-6)(9-7)(9-8)} = \frac{x^3}{6} - \frac{7}{2}x^2 + \frac{73}{3}x - 56 \quad \rightarrow \quad c_3 = \mathrm{L}_3'(6.5) = -\frac{1}{24}$$

Para saber si los hemos calculado bien, los sumamos todos y el resultado tiene que ser 0:

$$\sum_{i=0}^{n} c_i = 0 = -\frac{23}{24} + \frac{7}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{24} = \frac{-23+21+3-1}{24} = 0$$

Como si que se cumple, es muy probable que estén bien.

Ahora lo vamos a resolver por el método de los coeficientes indeterminados. Lo primero que tenemos que hacer es expresar el soporte siguiendo la siguiente forma: $s_i = x^* + \theta_i h$, ya que para calcular la matriz y el vector necesarios para realizar el sistema de ecuaciones, necesitamos saber las θ_i y las h.

Como el punto es 6.5 y se encuentra entre los puntos de soporte 6 y 7, la distancia mínima de nuestra x* (6,5) y un punto del soporte es 0.5 (7-6.5 = 0.5 y |6-6.5| = 0.5), por lo que nuestra h = 0.5

Nuestro soporte quedará entonces de la siguiente forma y con él despejamos las θ_i:

$$s_0 = 6 = 6.5 + 0.5\,\theta_0 \quad \rightarrow \quad \theta_0 = -1 \qquad\qquad s_1 = 7 = 6.5 + 0.5\,\theta_0 \quad \rightarrow \quad \theta_1 = 1$$

$$s_2 = 8 = 6.5 + 0.5\,\theta_0 \quad \rightarrow \quad \theta_0 = 3 \qquad\qquad s_3 = 9 = 6.5 + 0.5\,\theta_0 \quad \rightarrow \quad \theta_0 = 5$$

Sustituimos todos los elementos que hemos calculado en el sistema matricial y resolvemos invirtiendo la matriz y multiplicando por el vector (hay que tener en cuenta que hay que multiplicar la matriz por la izquierda, para que se simplifique del otro lado). Si lo hemos hecho bien, el resultado debería salirnos igual que el obtenido por el método de Lagrange.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \theta_0 & \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 \\ \theta_0^2 & \theta_1^2 & \theta_2^2 & \theta_3^2 \\ \theta_0^3 & \theta_0^3 & \theta_0^3 & \theta_0^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1! \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{1}{h^1} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 9 & 25 \\ -1 & 1 & 27 & 125 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Efectivamente, si resolvemos el sistema, obtenemos los mismos coeficientes que antes:

$$c_0 = -\frac{23}{24}, \qquad c_1 = \frac{7}{8}, \qquad c_2 = \frac{1}{8}, \qquad c_3 = -\frac{1}{24}$$

Ejercicio 3: Sea h un valor real estrictamente positivo. Considérese el soporte formado por los 5 puntos siguientes: $S = \{-2h, -h, 0, h, 2h\}$. Sea además $f(x)$ una función de la que se conocen los valores:

$f(-2h) = e^{h}$, $f(-h) = e^{h/2}$, $f(0) = e^{-h/2}$, $f(2h) = e^{-h}$

Se pide:

a) Obtener el polinomio interpolador de Lagrange de la función $f(x)$ sobre el soporte S. Puedes utilizar el método de obtención del polinomio interpolador que desees.

b) Deducir la fórmula de derivación numérica de tipo interpolatorio que utilizando el soporte S permite obtener el valor f'_{x^*} que aproxima $f'(x^*)$ para $x^* = 0$.

c) Deducir la fórmula de derivación numérica de tipo interpolatorio que utilizando el soporte S permite obtener el valor f''_{x^*} que aproxima $f''\ x^*$ para $x^* = 0$.

Apartado a)

Este apartado no está relacionado con la derivación, ya que nos pide calcular el polinomio interpolador. Pero nos puede servir para calcular después la aproximación de las derivadas.

Para resolver este apartado lo podemos hacer de tres formar: resolviendo un sistema de ecuaciones, por el método de Lagrange o por el método de Newton. Nosotros en este caso sólo lo vamos a resolver por el método de Newton, pero como el resultado es el mismo, da igual que método se utilice. (Si se tiene algún problema en este apartado, aconsejamos mirar el recurso de la página relacionado con los métodos de interpolación).

Calculamos el polinomio con la tabla y las diferencias divididas:

$-2h$	$f[s_0]$	$\frac{f[s_1]-f[s_0]}{h}$	$\frac{f[s_2]-2f[s_1]+f[s_0]}{2h^2}$	$\frac{f[s_3]-3f[s_2]+3f[s_1]-f[s_0]}{6h^3}$	$\frac{f[s_4]-4f[s_3]+6f[s_2]-4f[s_1]+f[s_0]}{24h^4}$
$-h$	$f[s_1]$	$\frac{f[s_2]-f[s_1]}{h}$	$\frac{f[s_3]-2f[s_2]+f[s_1]}{2h^2}$	$\frac{f[s_4]-3f[s_3]+3f[s_2]-f[s_1]}{6h^3}$	0
0	$f[s_2]$	$\frac{f[s_3]-f[s_2]}{h}$	$\frac{f[s_4]-2f[s_3]+f[s_2]}{2h^2}$	0	0
h	$f[s_3]$	$\frac{f[s_4]-f[s_3]}{h}$	0	0	0
$2h$	$f[s_4]$	0	0	0	0

$$\begin{aligned} p_4(x) = f[s_0] &+ \frac{f[s_1]-f[s_0]}{h}(x+2h) + \frac{f[s_2]-2f[s_1]+f[s_0]}{2h^2}(x+2h)(x+h) + \\ &+ \frac{f[s_3]-3f[s_2]+3f[s_1]-f[s_0]}{6h^3}(x+2h)(x+h)x + \\ &+ \frac{f[s_4]-4f[s_3]+6f[s_2]-4f[s_1]+f[s_0]}{24h^4}(x+2h)(x+h)x(x-h) \end{aligned}$$

Sustituimos los valores por los datos que nos aporta el enunciado:

$$\begin{aligned} p_4(x) = e^h &+ \frac{e^{h/2}-e^h}{h}(x+2h) + \frac{1-2e^{h/2}+e^h}{2h^2}(x+2h)(x+h) + \\ &+ \frac{e^{-h/2}-3+3e^{h/2}-e^h}{6h^3}(x+2h)(x+h)x + \\ &+ \frac{e^{-h}-4e^{-h/2}+6f-4e^{h/2}+e^h}{24h^4}(x+2h)(x+h)x(x-h) \end{aligned}$$

Si se quiere, se podría simplificar el resultado, pero como después vamos a tener que derivar y sustituir por 0 (ya que es nuestra x*), es mejor dejarlo así ya que si operamos hay más riesgo de que nos confundamos.

Apartado b)

Como nos pide calcular la aproximación de la primera derivada para x=0, se puede resolver también de diferentes maneras (con el método de coeficientes indeterminados, por el método de Lagrange, ...), pero como acabamos de calcular el polinomio interpolador de la función, la solución más fácil es derivando este polinomio:

$$\begin{aligned} p_4'(x) &= \frac{e^{h/2}-e^h}{h} + \frac{1-2e^{h/2}+e^h}{2h^2}(2x+3h) + \\ &+ \frac{e^{-h/2}-3+3e^{h/2}-e^h}{6h^3}[(x+h)x+(x+2h)x+(x+2h)(x+h)] + \\ &+ \frac{e^{-h}-4e^{-h/2}+6f-4e^{h/2}+e^h}{24h^4}[(x+h)x(x-h) + \\ &+ (x-2h)x(x-h)+(x+2h)(x+h)(x-h)+(x+2h)(x+h)x] \end{aligned}$$

Como nos la pide para x=0, sustituimos:

$$f'(0) \approx f'_{x^*} = p_4'(0) = \frac{1}{12h}\left(e^h - 8e^{\frac{h}{2}} + 8e^{-\frac{h}{2}} - e^{-h}\right)$$

Apartado c)

Al igual que en el apartado anterior, se puede hacer de diferentes formas, pero la más fácil es derivando del apartado anterior (b):

$$p_4'(x) = \frac{e^{h/2} - e^h}{h} + \frac{1 - 2e^{h/2} + e^h}{2h^2}(2x + 3h) +$$
$$+\frac{e^{-h/2} - 3 + 3e^{h/2} - e^h}{6h^3}[(x + h)x + (x + 2h)x + (x + 2h)(x + h)] +$$
$$+\frac{e^{-h} - 4e^{-h/2} + 6f - 4e^{h/2} + e^h}{12h^4}[x(x + 2h) + x(x + h) +$$
$$+x(x - h) + (x + 2h)(x + h) + (x + h)(x - h)]$$

Como nos lo pide para x=0, sustituimos:

$f''(0) \approx p_4''(0) =$ $\frac{1}{12h^2}\left(-e^h + 16e^{\frac{h}{2}} - 30 + 16e^{-\frac{h}{2}} - e^{-h}\right)$