Derivación: Ejercicios

En este recurso vamos a aplicar la teoría de la derivación numérica de tipo interpolatorio en ejercicios diseñados para entenderla. Vamos a realizar algunos ejercicios sencillos, con la solución explicada para comprender bien la teoría. Se recomienda ver la parte de teoría de derivación antes de realizar los ejercicios.

Ejercicio 1.

De una función f(x) se conocen los siguientes valores:

s_k	0	1/2	3/2	2
$f(s_k)$	-1	0	5	9

y se desea interpolarla mediante Lagrange con un polinomio de grado igual o menor que tres.

Se pide:

Calcular los polinomios de la base de Lagrange y los coeficientes de una fórmula de derivación que permita aproximar con dicho soporte, el valor de f'(1).

Solución:

Paso 1: Calcular las bases de Lagrange. Si recordamos, los coeficientes del polinomio interpolador de Lagrange se obtenían mediante la siguiente fórmula:

$$c_i = \mathrm{L}_i^{(k}(x^*)$$

Siendo Li las bases de Lagrange, que seguían la fórmula:

$$\mathrm{L}_i(x) = \prod_{\substack{0\le j\le n \\ j\ne i}} \frac{x - s_j}{s_i - s_j}$$

Por lo que, con los datos del soporte dados, podemos obtener las bases de Lagrange aplicando la fórmula. El valor Si siempre debe ser el del soporte que estemos trabajando, por lo que si queremos encontrar la base de Lagrange en 1, Si será siempre 1/2. Sj en cambio son el resto de soportes que hay, y se deben utilizar todos dentro de la fórmula. Los resultados quedarían así:

$$L_o(x) = \left(\frac{x-\frac{1}{2}}{0-\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{x-\frac{3}{2}}{0-\frac{3}{2}}\right)\left(\frac{x-2}{0-2}\right) = \frac{1}{6}(6 - 19x + 16x^2 - 4x^3)$$

$$L_1(x) = \left(\frac{x-0}{\frac{1}{2}-0}\right)\left(\frac{x-\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}\right)\left(\frac{x-2}{\frac{1}{2}-2}\right) = \frac{1}{3}(12x - 14x^2 + 4x^3)$$

$$L_2(x) = \left(\frac{x-0}{\frac{3}{2}-0}\right)\left(\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}\right)\left(\frac{x-2}{\frac{3}{2}-2}\right) = \frac{1}{3}(-4x+10x^2-4x^3)$$

$$L_3(x) = \left(\frac{x-0}{2-0}\right)\left(\frac{x-\frac{1}{2}}{2-\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{x-\frac{3}{2}}{2-\frac{3}{2}}\right) = \frac{1}{6}(3x-8x^2+4x^3)$$

Paso 2: Calcular las derivadas de las bases de Lagrange. Esto consiste simplemente en derivar los resultado obtenidos en el paso 1. Así, las derivadas quedan de esta manera:

$$L'_o(x) = \frac{1}{6}(-19+32x-12x^2)$$

$$L'_1(x) = \frac{1}{3}(12-28x+12x^2)$$

$$L'_2(x) = \frac{1}{3}(-4+20x-12x^2)$$

$$L'_3(x) = \frac{1}{6}(3-16x+12x^2)$$

Paso 3: Calcular los coeficientes (Ci), con la formula anterior. Como deben poder aproximar el valor de f'(1), se calculan las derivadas de las bases de Lagrange en 1. Se obtienen los siguientes coeficientes:

$$C_0 = L'_o(1) = \frac{1}{6}\ , C_1 = L'_1(1) = \frac{-4}{3}\ ,\ C_2 = L'_2(1) = \frac{4}{3}\ , C_3 = L'_3(1) = \frac{-1}{6}$$

Paso 4: Calcular la fórmula de derivación y aproximarla a f'(1). Esta fórmula es un sumatorio que multiplica los coeficientes y la función evaluada en el soporte, tal que así:

$$\boxed{f^{(k}(x^*) \approx \sum_{i=0}^{n} c_i \cdot f(s_i)}$$

por lo que, metiendo los datos, la fórmula aproximada nos da el resultado de 5.

$$f'(1) \approx \frac{1}{6} * f(0) - \frac{4}{3} * f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{4}{3} * f\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{1}{6} * f(2)$$

$$= \frac{1}{6} * (-1) - \frac{4}{3} * f(0) + \frac{4}{3} * (5) - \frac{1}{6} * (9) = 5$$

*Este ejercicio también se puede resolver mediante las diferencias divididas de Newton, ya que f´(1) ≈ p´(1). Calculando la tabla de diferencias divididas, se calcula el polinomio y se aproxima a 1.

$s_0 = 0$	$f[s_0] = -1$	$f[s_0, s_1] = \frac{0+1}{\frac{1}{2}-0} = 2$	$f[s_0, s_1, s_2] = \frac{5-2}{\frac{3}{2}-0} = 2$	$f[s_0, s_1, s_2, s_3] = \frac{2-2}{2-0} = 0$
$s_1 = \frac{1}{2}$	$f[s_1] = 0$	$f[s_1, s_2] = \frac{5-0}{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}} = 5$	$f[s_1, s_2, s_3] = \frac{8-5}{2-\frac{1}{2}} = 2$	
$s_2 = \frac{3}{2}$	$f[s_2] = 5$	$f[s_2, s_3] = \frac{9-5}{2-\frac{3}{2}} = 8$		
$s_3 = 2$	$f[s_3] = 9$			

$$f[s_0, s_1, s_2, \dots, s_n] = \frac{f[s_1, s_2, \dots, s_n] - f[s_0, s_1, s_2, \dots, s_{n-1}]}{s_n - s_0}$$

Con esta fórmula se crea el polinomio interpolador y se resuelve el ejercicio, que como podemos comprobar, da el mismo resultado que la otra forma de resolverlo. Sin embargo, este método no nos permite obtener la fórmula de derivación.

$$p(x) = -1 + 2x + 2x\left(x - \frac{1}{2}\right) + 0x\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right) = -1 + x + 2x^2$$

$$p'(x) = 1 + 4x \rightarrow f'(1) \approx 5$$

Ejercicio 2.

Se considera la función f(x) = ln(1+x) y la fórmula de derivación numérica para aproximar la primera derivada de la función f(x) en el punto 6,5:

$$f'(6.5) \approx c_0 f(6) + c_1 f(7) + c_2 f(8) + c_4 f(9)$$

Se pide:

¿Qué valores deben tomar los coeficientes co, c1, c2 y c3 para que la expresión anterior se corresponda con una fórmula de derivación tipo interpolatorio?

Solución:

El procedimiento de este ejercicio es similar al anterior. Debemos determinar los polinomio que forman la base de Lagrange. Si observamos los datos, el problema nos da el soporte, que es {s0, s1, s2, s3} = {6, 7, 8, 9}. Con el soporte podemos calcular las bases de Lagrange (Li) de la misma forma que el ejercicio anterior, siguiendo la fórmula propia de las bases.

$$L_0(x) = \frac{(x-7)(x-8)(x-9)}{(6-7)(6-8)(6-9)} = -\frac{x^3}{6} + 4x^2 - \frac{191}{6}x + 84$$

$$L_1(x) = \frac{(x-6)(x-8)(x-9)}{(7-6)(7-8)(7-9)} = \frac{x^3}{2} - \frac{23}{2}x^2 + 87x - 216$$

$$L_2(x) = \frac{(x-6)(x-7)(x-9)}{(8-6)(8-7)(8-9)} = -\frac{x^3}{2} + 11x^2 - \frac{159}{2}x + 189$$

$$L_3(x) = \frac{(x-6)(x-7)(x-8)}{(9-6)(9-7)(9-8)} = \frac{x^3}{6} - \frac{7}{2}x^2 + \frac{73}{3}x - 56$$

Después, se calcula la derivada de las bases de Lagrange, derivando el polinomio obtenido anteriormente:

$$L'_0(x) = -\frac{x^2}{2} + 8x - \frac{191}{6}$$

$$L'_1(x) = \frac{3x^2}{2} - 23x + 87$$

$$L'_2(x) = -\frac{3x^2}{2} + 22x - \frac{159}{2}$$

$$L'_3(x) = \frac{x^2}{2} - 7x + \frac{73}{3}$$

Por último, se calculan los coeficientes, es decir, evalúas la derivada en el punto que quieres aproximar, que en este caso es 6,5:

$$C_0 = L'_0(6{,}5) = -\frac{23}{24}, C_1 = L'_1(6{,}5) = \frac{7}{8}, C_2 = L'_2(6{,}5) = \frac{1}{8}, C_3 = L'_3(6{,}5) = -\frac{1}{24}$$

Para comprobar que los resultados que hemos obtenido son correctos, la suma de los coeficientes debe ser 0, y en este caso, la suma nos da 0, por lo que los coeficientes son correctos.
Así que la respuesta es que los coeficientes corresponden a la expresión para que sea una FDNTI.

$$\sum_{i=0}^{n} c_i = 0 = -\frac{23}{24} + \frac{7}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{24} = \frac{-23+21+3-1}{24} = 0$$