Ejercicios de Lagrange

El objetivo de este recurso será poner en práctica toda la teoría estudiada con respecto a la interpolación por bases de Lagrange. Para ello realizaremos un par de ejercicios simples para que el estudio se haga mucho más ameno y resulte mas eficaz. Es recomendable haber visto antes nuestro recurso sobre la teoría de este tema o cualquier documento que explique correctamente el método de las bases de Lagrange.

Ejercicio 1

De una función $f(x)$ se conocen los siguientes valores: $f(-1) = 3$, $f(0) = 2$ y $f(2) = 6$. ¿Cuál es su polinomio interpolador sobre el soporte $\{-1, 0, 2\}$?

Lagrange es una forma muy simple de resolver este tipo de ejercicios, los únicos pasos que hay que llevar a cabo son la obtención de las bases de Lagrange y la sustitución de valores en la formula interpoladora con estas.

Para obtener las bases de Lagrange debemos emplear una formula muy simple que consiste en multiplicar el resultado del resto de x menos los puntos de soporte los cuales no son el de la base que estamos intentando obtener, y a este producto dividirlo por el punto del soporte que si corresponde a la base menos el resto de puntos del soporte.

Aunque esto así puesto suene muy confuso es en verdad muy simple, vamos a poner que tenemos 3 puntos a los que llamamos s0,s1 y s2 (tres puntos significan tres bases de Lagrange), pues si pusiesemos todo lo explicado en el parrafo anterior en fórmulas obtendríamos los siguente

	(multiplicar x menos los ptos del soporte) /		(sx menos el resto de ptos)
L0(correspondiente a s0)=	**(x-s1)*(x-s2)**	**/**	**(s0-s1)*(s0-s2)**
L1(correspondiente a s1)=	**(x-s0)*(x-s2)**	**/**	**(s1-s0)*(s1-s2)**
L2(correspondiente a s2)=	**(x-s0)*(x-s1)**	**/**	**(s2-s0)*(s2-s1)**

o en el caso de este ejercicio:

-L0= (x-0)*(x-2)/((-1)-0)*((-1)-2)

-L1= (x+1)*(x-2)/(0+1)*(0-2)

-L2= (x+1)*(x-0)/(2+1)*(2+0)

Lo que quedaría de la siguiente manera:

$$L_0(x) = \frac{(x-s_1)}{(s_0-s_1)}\frac{(x-s_2)}{(s_0-s_2)} = \frac{(x-0)}{((-1)-0)}\frac{(x-2)}{((-1)-2)} = \frac{x^2-2x}{3}$$
$$L_1(x) = \frac{(x-s_0)}{(s_1-s_0)}\frac{(x-s_2)}{(s_1-s_2)} = \frac{(x+1)}{(0+1)}\frac{(x-2)}{(0-2)} = \frac{x^2-x-2}{-2}$$
$$L_2(x) = \frac{(x-s_0)}{(s_2-s_0)}\frac{(x-s_1)}{(s_2-s_1)} = \frac{(x+1)}{(2+1)}\frac{(x-0)}{(2+0)} = \frac{x^2+x}{6}$$

Una vez tenemos las bases de Lagrange debemos poner en práctica la fomula de Lagrange, la cual es un sumatorio del productorio de las bases de lagrange por el resultado obtenido de evaluar la función en cada uno de los puntos soporte, es decir, los resultados que se nos dan en el enunciado.

Si volviésemos al ejemplo que he puesto al principio para explicar como obtener las bases el polinomio interpolador nos quedaría tal que:

P(x)= f(s0)*L0+f(s1)*L1+f(s2)*L2

<u>o en el caso de este ejercicio:</u>

P(x)= 3*Lo+2*L1+6*L2

Lo que quedaría tal que:

$$3\left(\frac{x^2-2x}{3}\right)+2\left(\frac{x^2-x-2}{-2}\right)+6\left(\frac{x^2+x}{6}\right) = x^2-2x-x^2+x+2+x^2+x$$

<u>Resultado:</u>

Nuestro polinomio quedaría tal que:

$$P(x)=x^2+2$$

<u>Ejercicio 2</u>

Ahora vamos a resolver los dos primeros apartados del examen PEP del primer semestre del curso 2024/2025, los cuales nos piden sacar dos polinomios distintos, así también os podeis familiarizar con los tipos de ejercicios que os pueden preguntar en el examen.

El ejercicio dice tal que así:

Un laboratorio farmacéutico está estudiando los efectos de un medicamento en el cuerpo humano a lo largo del tiempo. Para ello, se ha medido la concentración del medicamento en sangre (en mg/L) en diferentes momentos después de su administración inicial a 50 pacientes diferentes. Además, se ha monitorizado el número de latidos por minuto (frecuencia cardíaca) de estos mismos sujetos.

En promedio, para todos los individuos, se han obtenido los siguientes datos:

Tiempo (horas)	0	1	3	4
Concentración (mg/L)	50	35	20	5
Frecuencia cardíaca (lpm)	78	76	75	76

a) Encuentra el polinomio interpolador de Lagrange que describe la concentración del medicamento en función del tiempo usando la tabla de diferencias divididas de Newton.

b) Encuentra el polinomio interpolador de Lagrange para la frecuencia cardíaca (puedes emplear el método que consideres conveniente).

Empecemos con el aparatado a (en el cual aunque pida newton usaremos Lagrange)

a) Vamos de nuevo a seguir los dos pasos que hemos explicado antes

1. Sacar las bases de Lagrange:

Datos que tenemos: soporte={0,1,3,4}, f(0)=50, f(1)=35, f(3)=20, f(4)=5

L0= (x-1)*(x-3)*(x-4) / (0-1)*(0-3)*(0-4)

L1= (x-0)*(x-3)*(x-4) / (1-0)*(1-3)*(1-4)

L2= (x-0)*(x-1)*(x-4) / (3-0)*(3-1)*(3-4)

L3= (x-0)*(x-1)*(x-3) / (4-0)*(4-1)*(4-3)

Lo que quedaría tal que:

$$L0=-x^3-8x^2+19x-12/(-12)$$

$$L1= x^3-7x^2+12x/(6)$$

$$L2= -x^3-5x^2+4x/(-6)$$

$$L3=x^3-4x^2+3x/12$$

2. Aplicamos la formula:

$$P(x)=50*(-12x^3-8x^2+19x-12/(-12))+35*(6x^3-7x^2+12x/(6))+20*(-6x^3-5x^2+4x/(-6))+5*(12x^3-4x^2+3x/12)$$

Y así obtenemos el resultado, ahora hacemos lo mismo con el apartado b

b)

1. Sacar las bases de Lagrange:

Datos que tenemos: soporte={0,1,3,4}, f(0)=78, f(1)=76, f(3)=75, f(4)=76

L0= (x-1)*(x-3)*(x-4) / (0-1)*(0-3)*(0-4)

L1= (x-0)*(x-3)*(x-4) / (1-0)*(1-3)*(1-4)

L2= (x-0)*(x-1)*(x-4) / (3-0)*(3-1)*(3-4)

L3= (x-0)*(x-1)*(x-3) / (4-0)*(4-1)*(4-3)

Cuyo desarrollo es:

$$L0=-x^3-8x^2+19x-12/(-12)$$

$$L1= x^3-7x^2+12x/(6)$$

$$L2= -x^3-5x^2+4x/(-6)$$

$$L3=x^3-4x^2+3x/12$$

2. Aplicamos la formula:

$$P(x)=78*(-12x^3-8x^2+19x-12/(-12))+76*(6x^3-7x^2+12x/(6))+75*(-6x^3-5x^2+4x/(-6))+76*(12x^3-4x^2+3x/12)$$

Y volvemos a obtener el resultado que buscabamos.