

Fórmulas de integración numérica de tipo interpolatorio a tramos

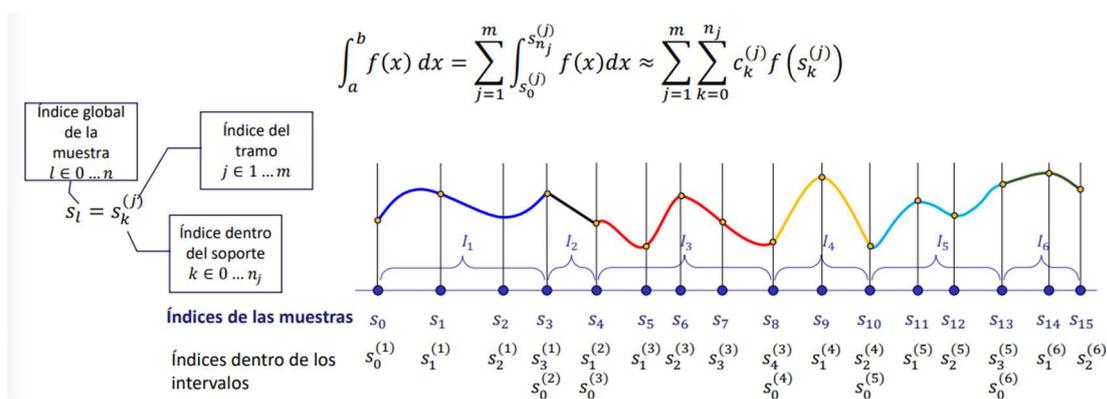
La integración por tramos consiste en subdividir el intervalo de integración en varios subintervalos (o tramos) y aplicar una fórmula de integración en cada uno. Esto se expresa como:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{j=1}^m \int_{s_0^{(j)}}^{s_n^{(j)}} f(x) dx$$

Donde:

- m es el número de subintervalos.
- $s_0^{(j)}$ y $s_n^{(j)}$ son los límites de cada tramo.

Esta metodología mejora la precisión porque permite ajustar mejor las características de la función en regiones específicas.



En esta imagen se ilustra el método de integración polinómica por tramos, donde el intervalo global $[a, b]$ se divide en subintervalos (I_1, I_2, \dots, I_6) . En cada tramo, la integral se aproxima mediante una suma ponderada de los valores de la función $f(x)$ evaluados en nodos locales $(s_k^{(j)})$ con coeficientes $c_k^{(j)*}$. Los nodos globales s_0, \dots, s_{15} se organizan de manera consecutiva, mientras que cada tramo utiliza índices locales para su cálculo.

*Los **coeficientes** $c_k^{(j)}$ provienen de **métodos de cuadratura**, que son técnicas para aproximar integrales. Se obtienen de:

1. Método de integración elegido:

- Por ejemplo:
 - **Regla del Trapecio:** coeficientes $[1/2, 1/2]$.
 - **Regla de Simpson:** coeficientes $[1/6, 4/6, 1/6]$.

- Regla del trapecio (dos nodos):

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)]$$

Los coeficientes son:

$$c_0 = \frac{b-a}{2}, \quad c_1 = \frac{b-a}{2}$$

- Regla de Simpson (tres nodos):

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]$$

Los coeficientes son:

$$c_0 = \frac{b-a}{6}, \quad c_1 = \frac{4(b-a)}{6}, \quad c_2 = \frac{b-a}{6}$$

(Se recomienda revisar temas anteriores que abordan este contenido).

2. Interpolación polinómica:

- Se integran los **polinomios base** de Lagrange o Newton en cada tramo para calcular los pesos $c_k^{(j)}$.

a) Polinomio de Lagrange

Si aproximamos $f(x)$ con un polinomio de interpolación $p(x)$ en $n + 1$ puntos:

$$p(x) = \sum_{k=0}^n f(s_k) \ell_k(x),$$

donde $\ell_k(x)$ son los polinomios base de Lagrange, la integral se aproxima como:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p(x)dx = \sum_{k=0}^n c_k f(s_k).$$

Los coeficientes c_k se obtienen integrando los polinomios $\ell_k(x)$ en el intervalo $[a, b]$:

$$c_k = \int_a^b \ell_k(x)dx.$$

3. Distribución de nodos (puntos de soporte):

- Los nodos pueden ser **equiespaciados** (Newton-Cotes) o **óptimos** (cuadratura de Gauss).

En la imagen, los coeficientes $c_k^{(j)}$ pesan las evaluaciones de la función en los nodos locales $s_k^{(j)}$ de cada tramo I_j .

Integración basada en Lagrange

Si sólo tengo un intervalo:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b p_n(x) dx = \sum_{k=0}^n f(s_k) \int_a^b L_k(x) dx = \sum_{k=0}^n c_k \cdot f(s_k)$$

Si hay m intervalos de grado n_j cada uno:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{j=1}^m \int_{s_0^{(j)}}^{s_{n_j}^{(j)}} f(x) dx \approx \sum_{j=1}^m \int_{s_0^{(j)}}^{s_{n_j}^{(j)}} v^{(j)}(x) dx = \sum_{j=1}^m \int_{s_0^{(j)}}^{s_{n_j}^{(j)}} f(s_0^{(j)}) L_0^{(j)}(x) + f(s_1^{(j)}) L_1^{(j)}(x) + \dots + f(s_{n_j}^{(j)}) L_{n_j}^{(j)}(x) dx =$$

$$= \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{n_j} \left(\int_{s_0^{(j)}}^{s_{n_j}^{(j)}} L_k^{(j)}(x) dx \right) f(s_k^{(j)}) = \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{n_j} c_k^{(j)} f(s_k^{(j)})$$

Tramo de I_j definido por un polinomio de grado n_j

Define los coeficientes de integración del intervalo

$c_k = \int_{s_0^{(j)}}^{s_{n_j}^{(j)}} L_k^{(j)}(x) dx$

Aproximación de una integral mediante polinomios de grado n_j en múltiples intervalos. La integral se calcula como una suma ponderada de los valores de la función $f(x)$ evaluados en puntos específicos, donde los coeficientes $c_k^{(j)}$ provienen de integrar los polinomios base $L_k^{(j)}$ en cada subintervalo.

- **Con dos valores en el intervalo:** $c_0^{(j)} = \frac{s_1^{(j)} - s_0^{(j)}}{2}$ $c_1^{(j)} = \frac{s_1^{(j)} - s_0^{(j)}}{2}$ **Fórmula del trapecio**

- **Con tres valores del soporte en el intervalo I_j :**

$$c_0^{(j)} = \int_{s_0^{(j)}}^{s_2^{(j)}} L_0^{(j)}(x) dx = \int_{s_0^{(j)}}^{s_2^{(j)}} \frac{(x - s_1^{(j)})(x - s_2^{(j)})}{(s_0^{(j)} - s_1^{(j)})(s_0^{(j)} - s_2^{(j)})} dx = \frac{(s_2^{(j)} - s_1^{(j)})(s_2^{(j)} - s_0^{(j)})}{3(s_0^{(j)} - s_1^{(j)})}$$

$$c_1^{(j)} = \int_{s_0^{(j)}}^{s_2^{(j)}} L_1^{(j)}(x) dx = \int_{s_0^{(j)}}^{s_2^{(j)}} \frac{(x - s_0^{(j)})(x - s_2^{(j)})}{(s_1^{(j)} - s_0^{(j)})(s_1^{(j)} - s_2^{(j)})} dx = \frac{(s_0^{(j)} - s_2^{(j)})((s_0^{(j)})^2 + s_0^{(j)}s_2^{(j)} + (s_2^{(j)})^2)}{6(s_1^{(j)} - s_0^{(j)})(s_1^{(j)} - s_2^{(j)})}$$

$$c_2^{(j)} = \int_{s_0^{(j)}}^{s_2^{(j)}} L_2^{(j)}(x) dx = \int_{s_0^{(j)}}^{s_2^{(j)}} \frac{(x - s_0^{(j)})(x - s_1^{(j)})}{(s_2^{(j)} - s_0^{(j)})(s_2^{(j)} - s_1^{(j)})} dx = \frac{2((s_2^{(j)})^2 + (s_0^{(j)})^2 + 3s_1^{(j)}(s_2^{(j)} - s_0^{(j)}))}{6(s_2^{(j)} - s_1^{(j)})}$$

- **Con tres valores en el soporte, uniformemente distribuidos:**

El problema consiste en sustituir $s_1^{(j)} = \frac{s_0^{(j)} + s_2^{(j)}}{2}$ en las expresiones de los coeficientes $c_0^{(j)}$ obteniéndose así los coeficientes de la fórmula de Simpson:

$$c_0^{(j)} = \frac{(s_2^{(j)} - s_0^{(j)})}{6} \quad c_1^{(j)} = \frac{4(s_2^{(j)} - s_0^{(j)})}{6} \quad c_2^{(j)} = \frac{(s_2^{(j)} - s_0^{(j)})}{6}$$

En resumen, dependiendo del número de valores en el intervalo:

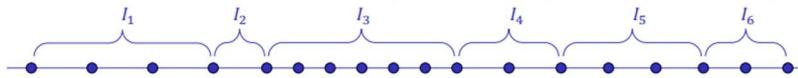
- **Con dos valores:** Se aplica la fórmula del trapecio, donde los coeficientes son iguales y dependen del tamaño del intervalo.
- **Con tres valores:** Se utiliza un polinomio cuadrático y se definen coeficientes más complejos que dependen de los nodos $s_0^{(j)}$, $s_1^{(j)}$ y $s_2^{(j)}$. Esto corresponde a una aproximación más precisa, como en la fórmula de Simpson.

Para intervalos de orden superior (número de valores del intervalo > 3) ...

1. Método de Newton-Cotes (soporte equiespaciado):

Este método se aplica cuando los puntos de soporte (nodos) están equiespaciados y consiste en un conjunto de fórmulas poderosas para realizar integraciones numéricas cuando se tienen puntos equiespaciados. Dependiendo de la cantidad de puntos y de la fórmula utilizada, puede proporcionar buenas aproximaciones con diferentes niveles de precisión. Para mejorar la precisión, se pueden usar fórmulas de orden superior, pero se debe considerar el costo computacional.

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{j=1}^m \int_{s_0^{(j)}}^{s_{n_j}^{(j)}} v^{(j)}(x) dx = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=0}^{n_j} c_k^{(j)} f(s_k^{(j)}) \right) = \sum_{j=1}^m \frac{(s_{n_j}^{(j)} - s_0^{(j)})}{D_{n_j}} \left(\sum_{k=0}^{n_j} \alpha_k^{(j)} f(s_k^{(j)}) \right)$$



	n	α_k					D_n	Nombre		
I_2	1	1	1				2	Trapecio		
I_4 I_6	2	1	4	1			6	Simpson		
I_1 I_5	3	1	3	3	1		8	Regla del 3/8		
	4	7	32	12	32	7	90	Milne		
	5	19	75	50	50	75	19	288		
I_3	6	41	216	27	272	27	216	41	840	Weddle

La elección de la regla de Newton-Cotes depende de la suavidad de la función que estamos integrando:

- Funciones suaves: Para funciones sin cambios abruptos, reglas de menor orden como el trapecio o Simpson pueden ser suficientes.
- Funciones con más variabilidad: Para funciones que cambian rápidamente o presentan irregularidades, se recomienda utilizar reglas de mayor orden, como Milne o Weddle.

2. Método de los coeficientes indeterminados (soporte no equiespaciado):

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{j=1}^m \int_{s_0^{(j)}}^{s_{n_j}^{(j)}} v^{(j)}(x) dx = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=0}^{n_j} c_k^{(j)} f(s_k^{(j)}) \right)$$

Para cada intervalo I_j , calculamos un conjunto de $c_k^{(j)}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ s_0^{(j)} & s_1^{(j)} & s_2^{(j)} & \dots & s_{n_j}^{(j)} \\ (s_0^{(j)})^{k-1} & (s_1^{(j)})^{k-1} & (s_2^{(j)})^{k-1} & \dots & (s_{n_j}^{(j)})^{k-1} \\ (s_0^{(j)})^k & (s_1^{(j)})^k & (s_2^{(j)})^k & \dots & (s_{n_j}^{(j)})^k \\ (s_0^{(j)})^{k+1} & (s_1^{(j)})^{k+1} & (s_2^{(j)})^{k+1} & \dots & (s_{n_j}^{(j)})^{k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (s_0^{(j)})^{n_j} & (s_1^{(j)})^{n_j} & (s_2^{(j)})^{n_j} & \dots & (s_{n_j}^{(j)})^{n_j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0^{(j)} \\ c_1^{(j)} \\ \vdots \\ c_{k-1}^{(j)} \\ c_k^{(j)} \\ c_{k+1}^{(j)} \\ \vdots \\ c_{n_j}^{(j)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(s_{n_j}^{(j)} - s_0^{(j)})}{((s_{n_j}^{(j)})^2 - (s_0^{(j)})^2)} \Big/ 2 \\ \vdots \\ \frac{((s_{n_j}^{(j)})^k - (s_0^{(j)})^k)}{k} \\ \frac{((s_{n_j}^{(j)})^{k+1} - (s_0^{(j)})^{k+1})}{k+1} \\ \frac{((s_{n_j}^{(j)})^{k+2} - (s_0^{(j)})^{k+2})}{k+2} \\ \vdots \\ \frac{((s_{n_j}^{(j)})^{n_j+1} - (s_0^{(j)})^{n_j+1})}{n+1} \end{bmatrix}$$

Esta fórmula proporciona una herramienta poderosa para aproximar integrales cuando los datos no están uniformemente distribuidos. Sin embargo, su implementación puede ser más compleja que las fórmulas de Newton-Cotes clásicas.

Ventajas del método de los coeficientes indeterminados

-Flexibilidad: No requiere puntos equidistantes, lo que lo hace adecuado para funciones con cambios abruptos o comportamientos irregulares.

-Precisión mejorada: Al poder adaptarse a las características locales de la función, puede ofrecer mejores resultados que los métodos tradicionales en intervalos no uniformemente espaciados.

-Aplicación a funciones complicadas: Se puede aplicar incluso cuando la función tiene singularidades o discontinuidades, siempre que estos puntos sean tratados adecuadamente.