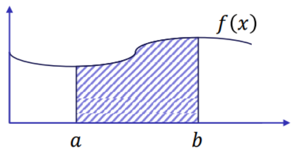
Fórmulas de integración numérica de tipo interpolatorio

1) Conceptos básicos

Antes de comenzar, es importante tener claros algunos conceptos básicos de integración, que probablemente ya hayas dado en matemáticas. Este es el Teorema Fundamental del Cálculo:

Si $F(x)$ es cualquier función primitiva de $f(x)$: $F'(x) \equiv f(x)$, entonces:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$



Ahora, si conocemos p(x) de f(x), es decir, su polinomio interpolador, podemos hacer la siguiente aproximación:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{j=0}^{n} \int_a^b f(s_i)\,\mathrm{L}_j(x)\,dx = \sum_{j=0}^{n} f(s_i) \int_a^b \mathrm{L}_j(x)dx$$

Siendo $L_j(x)$ polinomios de Lagrange asociados a los puntos de interpolación. En este caso, n es el grado del polinomio. Hay n+1 puntos porque comenzamos el soporte desde s_0 hasta s_n.

Al igual que en la derivación numérica (importante verla antes), el polinomio puede expresarse en bases de Newton, lo cual facilita mucho los cálculos.

Fórmulas de integración numérica interpolatoria

Para una nube de n+1 puntos s_j (del soporte), la integral puede aproximarse como una suma ponderada:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{j=0}^{n} c_j \cdot f(s_j)$$

Los coeficientes c_j son los pesos asociados a cada punto de interpolación. Básicamente determinan **cuánto** contribuye cada punto de evaluación $f(s_j)$ a la integral total. Como no todos los puntos tienen la misma importancia a la hora de aproximar la curva, estos pesos están para ajustar esta contribución. Prácticamente, son como “factores de ajuste” que se aseguran de que la suma de los valores en los puntos de interpolación se aproxime correctamente al área bajo la curva.

La determinación de los valores específicos de estos pesos dependerá del método de integración utilizado, como Simpson o el del trapecio, los cuales se explicarán más adelante. Además, cumplen esta condición:

$$\sum_{j=0}^{n} c_j = b - a$$

2) Métodos de integración

Hay muchos métodos, que se diferencian de la siguiente manera:

- Integrando el polinomio interpolador:
  - En su forma de combinación lineal de bases de Lagrange
  - En su forma de combinación lineal de bases de Newton
- A partir de la fórmula de la cuadratura
  - Método de coeficientes indeterminados
  - Método de Newton-Cotes
  - Método de Gauss-Legendre

Integrando el polinomio interpolador

La integral se aproxima al polinomio interpolador p(x) calculado por Lagrange:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b p_n(x)\,dx = \sum_{j=0}^{n} f(s_i) \int_a^b L_j(x)\,dx = \sum_{j=0}^{n} c_j \cdot f(s_j)$$

$$\boxed{c_j = \int_a^b L_j(x)\,dx}$$

$$\mathrm{L}_j(x) = \prod_{\substack{0 \le i \le n \\ i \ne j}} \frac{x - s_i}{s_j - s_i}$$

O se aproxima al polinomio interpolador p(x) calculado por Newton:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b p_n(x)\,dx = \sum_{j=0}^{n} p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f[s_0, s_1, \dots, s_i] \prod_{j=0}^{i-1} (x - s_j) = \sum_{j=0}^{n} c_j \cdot f(s_j)$$

Ahora vamos a aproximar las integrales en casos más específicos, dependiendo de la cantidad de valores que haya en el soporte. Cuantos más haya, más se complica, pero mejor es la aproximación.

1) Un solo valor del soporte

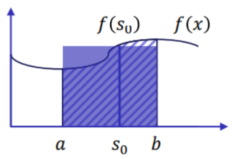
$$\mathrm{L}_0(x) = 1 \qquad \int_a^b f(x)\,dx \approx f(s_0) \int_a^b \mathrm{L}_0(x)dx$$

Con una única muestra en el soporte, el resultado solo sería válido en los alrededores de s_0, ya que el valor del polinomio interpolador solo es útil para el intervalo en el que se encuentra el soporte.

Por ello, en este caso tomamos este resultado como una interpretación geométrica de la integral (el área bajo la curva), dependiendo de dónde tomemos s_0.

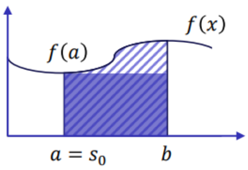
Por ello tenemos distintas fórmulas para un solo punto del soporte, dependiendo de dónde esté situado s_0.

<u>Fórmula general:</u>



$$\int_a^b f(x)\,dx \approx (b-a)f(s_0)$$

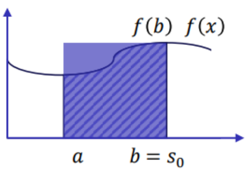
<u>Fórmula en la que a=s_0</u>



Fórm. del rectángulo a la izquierda

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx (b-a)f(a)$$

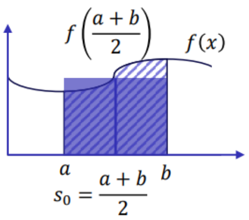
<u>Fórmula en la que b=s_0</u>



Fórm. del rectángulo a la derecha

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx (b-a)f(b)$$

<u>Fórmula en la que s_0 está justo entre a y b:</u>



Fórm. del punto medio

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx (b-a)f(\frac{a+b}{2})$$

2) Dos valores del soporte

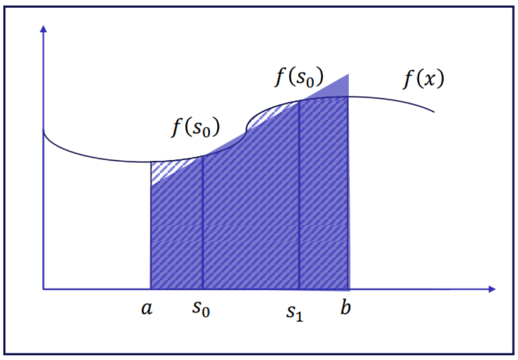
En este caso, tenemos s_0 y s_1. Esta es la aproximación de la integral al polinomio integrado:

$$L_0(x) = \frac{x-s_1}{s_0-s_1} \qquad L_1(x) = \frac{x-s_0}{s_1-s_0}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx f(s_0)\int_a^b L_0(x)dx + f(s_1)\int_a^b L_1(x)dx$$

Al igual que en el caso anterior, aquí las fórmulas también dependen de dónde exactamente estén los puntos del soporte en contexto con la curva y la integral. También tenemos diferentes fórmulas o procesos para cada caso:

Fórmula general:



$$c_0 = \int_a^b L_0(x)dx = \frac{1}{s_0 - s_1}\left(\frac{(b-s_1)^2}{2} - \frac{(a-s_1)^2}{2}\right) = \frac{(b-a)(b+a-2s_1)}{2(s_0-s_1)}$$

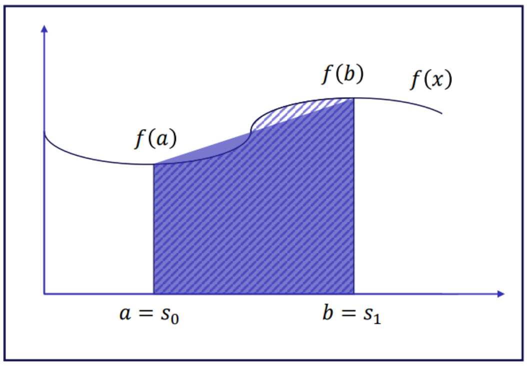
$$c_1 = \int_a^b L_1(x)dx = \frac{1}{s_1 - s_0}\left(\frac{(b-s_0)^2}{2} - \frac{(a-s_0)^2}{2}\right) = \frac{(b-a)(b+a-2s_0)}{2(s_1-s_0)}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx c_0 f(s_0) + c_1 f(s_1)$$

Vemos que s_0 y s_1 no coinciden con a ni b y tampoco están justo en el medio, por eso lo consideramos "general", porque no es un caso específico. El proceso que viene al lado de la imagen detalla cómo encontrar los pesos para este caso, los cuales, como venía indiciado al principio, son los que nos van a permitir aproximar la integral. Como se puede observar, se calculan a partir de **integrar cada polinomio de Lagrange**.

Fórmula del trapecio:

Esta fórmula específica la encontramos cuando s_0=a y s_1=b. El proceso para obtenerla es el mismo que el anterior.



$$c_0 = \int_a^b \mathrm{L}_0(x)dx = \frac{1}{a-b}\left(\frac{(b-b)^2}{2} - \frac{(a-b)^2}{2}\right) = \frac{b-a}{2}$$

$$c_1 = \int_a^b \mathrm{L}_1(x)dx = \frac{1}{b-a}\left(\frac{(b-a)^2}{2} - \frac{(a-a)^2}{2}\right) = \frac{(b-a)}{2}$$

Fórmula del trapecio

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{(b-a)}{2}\big(f(a) + f(b)\big)$$

El proceso se simplifica mucho más, y la aproximación es, aunque no perfecta, algo mejor.

3) Tres valores del soporte

Con tres valores del soporte, los cuales coinciden con a, b y justo en el medio, tal que:

$$s_0 = a,\ s_1 = \frac{a+b}{2} \text{ y } s_2 = b$$

Se obtiene la fórmula de Simpson, tanto como si se hace por medio de Lagrange como por Newton (por este último se obtienen los coeficientes de la fórmula de Simpson.

Desarrollándolo con Lagrange:

$$c_1 = \int_a^b l_1(x)\,dx = \int_a^b \frac{(x-a)(x-b)}{\left(\frac{a+b}{2}-a\right)\left(\frac{a+b}{2}-b\right)}\,dx =$$

$$= \frac{-4}{(b-a)^2}\int_a^b (x^2-(a+b)x+ab)\,dx = \frac{-4}{(b-a)^2}\left[\frac{x^3}{3}-\frac{a+b}{2}x^2+abx\right]_a^b = \frac{4(b-a)}{6}$$

$$c_2 = \int_a^b L_2(x)dx = \int_a^b \frac{(x-a)(x-\frac{a+b}{2})}{(b-\frac{a+b}{2})(b-a)}dx = \frac{2}{(b-a)^2}\int_a^b (x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)dx =$$

$$= \frac{2}{(b-a)^2}\int_a^b \left(x^2-\frac{3b+a}{2}x+\frac{a^2+ab}{2}\right)dx = \frac{2}{(b-a)^2}\left[\frac{x^3}{3}-\frac{3b+a}{4}x^2+\frac{a^2+ab}{2}x\right]_a^b = \frac{(b-a)}{6}$$

$$c_0 = \frac{(b-a)}{6} \qquad c_1 = \frac{4(b-a)}{6} \qquad c_2 = \frac{(b-a)}{6}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx c_0 f(a) + c_1 f\left(\frac{a+b}{2}\right) + c_2 f(b)$$

Fórmula de Simpson

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{(b-a)}{6}\left(f(a) + 4\cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$$

(El desarrollo no importa tanto como la fórmula)

Desarrollándolo con Newton:

$s_0 = a$	$f[a]$	$f[a,b] = \frac{f[b]-f[a]}{b-a}$	$f\left[a,b,\frac{a+b}{2}\right] = 2\frac{f[b]-2f\left[\frac{a+b}{2}\right]+f[a]}{(b-a)^2}$
$s_2 = b$	$f[b]$	$f\left[b,\frac{a+b}{2}\right] = 2\frac{f[b]-f\left[\frac{a+b}{2}\right]}{b-a}$	0
$s_1 = \frac{a+b}{2}$	$f\left[\frac{a+b}{2}\right]$	0	0

$$p_2(x) = f[a]+f[a,b](x-a) + f\left[a,b,\frac{a+b}{2}\right](x-a)(x-b)$$

$$= f(a) + \frac{f(b)-f(b)}{b-a}(x-a) + \frac{f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(a)}{(b-a)^2}(x-a)(x-b)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b p_2(x)\,dx = f(a)\int_a^b dx + \frac{f(b)-f(b)}{b-a}\int_a^b (x-a)dx + \frac{f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(a)}{(b-a)^2}\int_a^b (x-a)(x-b)dx =$$

$$= f(a)(b-a) + \frac{f(b)-f(b)}{b-a}\frac{1}{2}(b-a)^2 + \frac{f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(a)}{(b-a)^2}\left([(x-b)(x-a)^2]_a^b - \int_a^b (x-a)^2dx\right) =$$

$$= \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)) - \frac{f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(a)}{(b-a)^2}\frac{1}{3}(b-a)^3 = \frac{b-a}{6}\left(3f(a)+3f(b)-2f(b)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)-2f(a)\right)$$

Se obtienen de nuevo los coeficientes de la **fórmula de Simpson** $c_0 = \frac{(b-a)}{6}$ $c_1 = \frac{4(b-a)}{6}$ $c_2 = \frac{(b-a)}{6}$

De nuevo, estos procesos y desarrollos son bastante largos. No hace falta sabérselo y probablemente nunca tengas que desarrollarlo, pero está bien saber de dónde viene la fórmula.

Como ya dijimos antes, cada fórmula y proceso cambia los valores determinados de los pesos, y esto es obvio teniendo en cuenta que cada fórmula corresponde a un número distinto de valores en el soporte.

Lo más importante a tener en cuenta es cómo es la aproximación en general a la integral (integrando el polinomio interpolador) y cuáles son las fórmulas principales: la del trapecio y la de Simpson.

A partir de la fórmula de cuadratura

Ahora explicaremos los otros métodos que quedan dentro de los métodos de integración que íbamos a tratar.

Condición de exactitud

Las fórmulas de integración numérica son exactas si se han calculado mediante un polinomio interpolador de grado igual o menor a n. Para ello, el soporte debe de ser de n+1 puntos. Es decir, que las fórmulas de integración numérica nos sirven como herramientas exactas y muy útiles a la hora de calcular integrales siempre que se cumplan estas dos condiciones.

La condición de exactitud se cumple siempre y cuando:

-Los puntos de muestreo estén correctamente distribuidos.

-El polinomio interpolador utilizado sea de grado igual o menor que n

Fórmula de cuadratura

En concreto, una fórmula de cuadratura se considera exacta para un polinomio de grado k si cumple la siguiente igualdad:

Fórmula de cuadratura $$\int_a^b (x-a)^k\,dx = \sum_{j=0}^{n} c_j\left(s_j-a\right)^k \qquad \forall k = 0,1,\dots,n$$

Cuando interpolamos con un polinomio de grado n, nos aseguramos de que la fórmula de cuadratura será exacta para todos los monomios hasta grado n:

$$\{1, (x-a), (x-a)^2, \dots, (x-a)^n\}$$

Algunos métodos, como el del trapecio o Simpson cumplen esta exactitud ya que cumplen las condiciones de los monomio $(x\text{-}a)^k$.

1) Coeficientes indeterminados

Básicamente, lo que este método busca es ajustar c_j y s_j para que la fórmula de cuadratura sea exacta para polinomios de grado menor o igual a n.

Tenemos la fórmula de cuadratura:

$$\boxed{\int_a^b (x-a)^k \, dx = \sum_{j=0}^{n} c_j \left(s_j - a\right)^k}$$

La expresamos para polinomios de grado k. Generalizando, para k, puedo plantear el problema mediante un sistema de ecuaciones: el método de los **coeficientes indeterminados:**

$$\boxed{\sum_{j=0}^{n} c_j \theta_j^k = \frac{\lambda^{k+1} h}{k+1}}$$

Siendo:

$$s_j = a + \theta_j h$$
$$b - a = \lambda h$$

Para ello, debemos plantear un sistema de ecuaciones que se vería así:

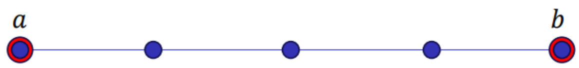
$$\overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \theta_0 & \theta_1 & \theta_2 & \cdots & \theta_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_0^{k-1} & \theta_1^{k-1} & \theta_2^{k-1} & \cdots & \theta_n^{k-1} \\ \theta_0^{k} & \theta_1^{k} & \theta_2^{k} & \cdots & \theta_n^{k} \\ \theta_0^{k+1} & \theta_1^{k+1} & \theta_2^{k+1} & \cdots & \theta_n^{k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_0^{n} & \theta_1^{n} & \theta_2^{n} & \cdots & \theta_n^{n} \end{bmatrix}}^{(n+1)\times(n+1)\text{, dependiente de las posiciones del soporte}} \overbrace{\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{k-1} \\ c_k \\ c_{k+1} \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}}^{(n+1)\text{ coefientes}} = \begin{bmatrix} \lambda \\ \lambda^2/2 \\ \vdots \\ \lambda^k/k \\ \lambda^{k+1}/k+1 \\ \lambda^{k+2}/k+2 \\ \vdots \\ \lambda^{n+1}/n+1 \end{bmatrix} h$$

Que es lo mismo que calcularlo directamente desde el soporte:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ s_0 & s_1 & s_2 & \cdots & s_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_0^{k-1} & s_1^{k-1} & s_2^{k-1} & \cdots & s_n^{k-1} \\ s_0^{k} & s_1^{k} & s_2^{k} & \cdots & s_n^{k} \\ s_0^{k+1} & s_1^{k+1} & s_2^{k+1} & \cdots & s_n^{k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_0^{n} & s_1^{n} & s_2^{n} & \cdots & s_n^{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{k-1} \\ c_k \\ c_{k+1} \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b-a \\ (b^2-a^2)/_2 \\ \vdots \\ (b^k-a^k)/_k \\ (b^{k+1}-a^{k+1})/_{k+1} \\ (b^{k+2}-a^{k+2})/_{k+2} \\ \vdots \\ (b^{n+1}-a^{n+1})/_{n+1} \end{bmatrix}$$

2) Método de Newton-Cotes: cerrado y abierto

Cerrado: deriva del método de coeficientes indeterminados, para el caso específico de un soporte equiespaciado tal que



$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & a+h & a+2h & \cdots & a+nh \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^{k-1} & (a+h)^{k-1} & (a+2h)^{k-1} & \cdots & (a+nh)^{k-1} \\ a^{k} & (a+h)^{k} & (a+2h)^{k} & \cdots & (a+nh)^{k} \\ a^{k+1} & (a+h)^{k+1} & (a+2h)^{k+1} & \cdots & (a+nh)^{k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^{n} & (a+h)^{n} & (a+2h)^{n} & \cdots & (a+nh)^{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{k-1} \\ c_k \\ c_{k+1} \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b-a \\ (b^2-a^2)/_2 \\ \vdots \\ (b^k-a^k)/_k \\ (b^{k+1}-a^{k+1})/_{k+1} \\ (b^{k+2}-a^{k+2})/_{k+2} \\ \vdots \\ (b^{n+1}-a^{n+1})/_{n+1} \end{bmatrix}$$

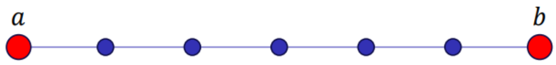
Sin embargo, no es necesario desarrollar, el sistema, ya que para este caso existe una tabla ya desarrollada con la cual se pueden resolver los ejercicios de forma práctica y eficiente:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{D}\sum_{j=0}^{n} \alpha_j f(s_j) \qquad s_j = a + jh \;\; \forall j = 0 \ldots n \qquad h = \frac{b-a}{n}$$

n	α_j	D	Nombre
1	1 1	2	Trapecio
2	1 4 1	6	Simpson
3	1 3 3 1	8	Regla del 3/8
4	7 32 12 32 7	90	Milne
5	19 75 50 50 75 19	288	
6	41 216 27 272 27 216 41	840	Weddle

Simplemente hay que sustituir en la fórmula con los valores de la tabla.

Abierto: deriva del método de coeficientes indeterminados, para el caso específico de un soporte equiespaciado tal que



$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a+h & a+2h & \cdots & a+nh & a+nh \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (a+h)^{k-1} & (a+2h)^{k-1} & \cdots & (a+nh)^{k-1} & (a+(n+1)h)^{k-1} \\ (a+h)^{k} & (a+2h)^{k} & \cdots & (a+nh)^{k} & (a+(n+1)h)^{k} \\ (a+h)^{k+1} & (a+2h)^{k+1} & \cdots & (a+nh)^{k+1} & (a+(n+1)h)^{k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (a+h)^{n} & (a+2h)^{n} & \cdots & (a+nh)^{n} & (a+(n+1)h)^{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{k-1} \\ c_k \\ c_{k+1} \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b-a \\ (b^2-a^2)/2 \\ \vdots \\ (b^k-a^k)/k \\ (b^{k+1}-a^{k+1})/k+1 \\ (b^{k+2}-a^{k+2})/k+2 \\ \vdots \\ (b^{n+1}-a^{n+1})/n+1 \end{bmatrix}$$

De la misma forma que con el cerrado, para el abierto también existe una tabla específica con la cual podremos resolver los ejercicios:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{D}\sum_{j=0}^{n} \alpha_j f(s_j) \qquad s_j = a + jh \;\; \forall j = 1 \ldots n+1 \qquad h = \frac{b-a}{n+2}$$

n	α_j	D	Nombre
0	1	1	Punto medio
1	1 1	2	
2	2 -1 2	3	
3	11 1 1 11	24	

3) Método de Gauss-Legendre

Se deriva del método de coeficientes indeterminados para un soporte NO equiespaciado. Se optimizan los puntos de soporte y los pesos para aumentar la precisión.

Los nodos si en la cuadratura de Gauss-Legendre son las raíces de los polinomios de Legendre. Estos polinomio se obtienen por medio de la ecuación de Legendre:

$$\frac{d}{dx}\left((1-x^2)\frac{dP_n(x)}{dx}\right) + n(n+1)P_n(x) = 0$$

Sin embargo, de la misma forma que con Newton-Cotes, tenemos una tabla con las raíces ya calculadas, así que no es necesario aplicarla.

Para un intervalo [-1, 1]

Polinomios	$P_1(x) = x$	$P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$	$P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$	$P_4(x) = \frac{35}{8}x^4 - \frac{15}{4}x^2 + \frac{3}{8}$
Raíces	$\xi_1 = 0$	$\xi_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\xi_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$	$\xi_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}}$ $\xi_2 = 0$ $\xi_3 = \sqrt{\frac{3}{5}}$	$\xi_1 = -\sqrt{\frac{30+\sqrt{480}}{70}}$ $\xi_2 = -\sqrt{\frac{30-\sqrt{480}}{70}}$ $\xi_3 = -\xi_2$ $\xi_4 = -\xi_1$
Pesos	2	1 1	$\frac{5}{9}$ $\frac{8}{9}$ $\frac{5}{9}$	$\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{5}{216}}$ $\frac{5+\sqrt{270}}{6\sqrt{30}}$ $\frac{5+\sqrt{270}}{6\sqrt{30}}$ $\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{5}{216}}$

Estas raíces son los soportes. Para obtener las fórmulas de Gauss-Legendre tenemos que aplicarles el método de los coeficientes indeterminados, y obtenemos:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}\sum_{j=1}^{n} \gamma_j f(s_j) \qquad s_j = \frac{a+b}{2} + \frac{(b-a)}{2}\xi_j$$

Estas fórmulas son las que nos van a permitir hacer un **cambio de variable** para poder aplicar el método de Gauss-Legendre sobre cualquier intervalo, no solo [-1,1]. Se realiza con la siguiente sustitución:

$$x = \frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2}$$

Siendo t la variable en el intervalo [-1,1] y x la del intervalo [a,b]

El cambio de variable es el mismo, da igual los puntos de la fórmula

Un ejemplo de este cambio de variable sería el siguiente, de un ejercicio resuelto:

Resuelve la integral $\int_0^2 e^x \sin x \; dx$

a) Mediante una fórmula de Gauss-Legendre de **dos puntos**.

Tenemos que realizar un cambio de variable para que el intervalo pase de $[0, 2]$ a $[-1, 1]$:

$x(z) = \alpha z + \beta \quad$ donde $\alpha = \frac{b-a}{2}$ y $\beta = \frac{a+2}{2}$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}\sum_{j=1}^{n}\gamma_j f(s_j) = \frac{2-0}{2}\left(\gamma_1 f\left(\frac{b-a}{2}\xi_1 + \frac{a+2}{2}\right) + \gamma_2 f\left(\frac{b-a}{2}\xi_2 + \frac{a+2}{2}\right)\right)$$

$$= e^{\frac{-1}{\sqrt{3}}+1}\sin\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}+1\right) + e^{\frac{1}{\sqrt{3}}+1}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+1\right)$$