INTEGRACIÓN POR TRAMOS

En **integración por tramos**, la integral se obtiene subdividiendo el intervalo de integración (a,b) en **m** subintervalos y aplicando una fórmula de integración en cada uno de ellos.
CUIDADO: las fronteras de la partición Δ coinciden con el intervalo de integración en cada tramo. Por ejemplo, en un intervalo j-ésimo tenemos estos puntos de frontera $[s_0^{(j)}, s_{n_j}^{(j)}]$ que delimitan también el intervalo de integración de ese tramo.

Entonces, en cada tramo aplicamos una fórmula de integración numérica del tipo:

$$\int_{s_0^{(j)}}^{s_{n_j}^{(j)}} f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n_j} c_k^{(j)} f(s_k^{(j)})$$

siendo n_j el grado del polinomio interpolador en ese tramo (nºpuntos-1)

y con $c_k^{(j)} = \int_{s_0^{(j)}}^{s_{n_j}^{(j)}} L_k^{(j)}(x)dx$ el conjunto de coeficientes correspondientes al intervalo j-ésimo.

No olvidar que hay tantos coeficientes $c_k^{(j)}$ en cada intervalo como puntos de soporte (incluyendo los puntos frontera)

Para hallar la integral total habrá por tanto que sumar todas las integrales de los trozos.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=0}^{n_j} c_k^{(j)} f(s_k^{(j)})$$

Aquí, el método para integrar la función subyacente a partir del polinomio interpolador es utilizando este como combinación lineal de bases de Lagrange.

EJEMPLOS EN INTERVALOS DE 2 Y 3 MUESTRAS EQUIESPACIADAS

- Coeficientes de la **fórmula del trapecio** en un intervalo de dos muestras:

$$c_0^{(j)} = \frac{s_1^{(j)} - s_0^{(j)}}{2} \qquad c_1^{(j)} = \frac{s_1^{(j)} - s_0^{(j)}}{2}$$

- Coeficientes de la **fórmula de Simpson** en un intervalo de tres muestras:

$$c_0^{(j)} = \frac{\left(s_2^{(j)} - s_0^{(j)}\right)}{6} \qquad c_1^{(j)} = \frac{4\left(s_2^{(j)} - s_0^{(j)}\right)}{6} \qquad c_2^{(j)} = \frac{\left(s_2^{(j)} - s_0^{(j)}\right)}{6}$$

Estos coeficientes se obtienen integrando las bases de Lagrange correspondientes y son los que remplazamos en la fórmula de integración numérica para cada intervalo.

INTERVALOS DE ORDEN SUPERIOR

SOPORTE EQUIESPACIADO por intervalos (no hace falta que lo sea globalmente)

Utilizamos el método de Newton Cotes con intervalos cerrados en cada uno de estos tramos cogiendo para cada uno los datos de la tabla e introduciéndolos en la siguiente fórmula.

$$\int_{s_0^{(j)}}^{s_{n_j}^{(j)}} f(x)dx \approx \frac{s_{n_j}^{(j)} - s_0^{(j)}}{D_{n_j}} \sum_{k=0}^{n_j} \alpha_k^{(j)} f(s_k^{(j)})$$

n	α_k	D_n	Nombre
1	1 1	2	Trapecio
2	1 4 1	6	Simpson
3	1 3 3 1	8	Regla del 3/8
4	7 32 12 32 7	90	Milne
5	19 75 50 50 75 19	288	
6	41 216 27 272 27 216 41	840	Weddle

SOPORTE NO EQUIESPACIADO por intervalos

Utilizamos el método de los coeficientes indeterminados para cada intervalo. Entonces para cada tramo tenemos que calcular un conjunto de $c_k^{(j)}$ que se obtiene a partir de la matriz de Vandermonde que es de orden n_j+1 .

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=0}^{n_j} c_k^{(j)} f(s_k^{(j)})$$

El vector de la derecha se obtiene a partir de la fórmula de la cuadratura (cf. recurso de integración).

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ s_0^{(j)} & s_1^{(j)} & s_2^{(j)} & \cdots & s_{n_j}^{(j)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \left(s_0^{(j)}\right)^{k-1} & \left(s_1^{(j)}\right)^{k-1} & \left(s_2^{(j)}\right)^{k-1} & \ddots & \left(s_{n_j}^{(j)}\right)^{k-1} \\ \left(s_0^{(j)}\right)^{k} & \left(s_1^{(j)}\right)^{k} & \left(s_2^{(j)}\right)^{k} & \cdots & \left(s_{n_j}^{(j)}\right)^{k} \\ \left(s_0^{(j)}\right)^{k+1} & \left(s_1^{(j)}\right)^{k+1} & \left(s_2^{(j)}\right)^{k+1} & \ddots & \left(s_{n_j}^{(j)}\right)^{k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \left(s_0^{(j)}\right)^{n_j} & \left(s_1^{(j)}\right)^{n_j} & \left(s_2^{(j)}\right)^{n_j} & \cdots & \left(s_{n_j}^{(j)}\right)^{n_j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0^{(j)} \\ c_1^{(j)} \\ \vdots \\ c_{k-1}^{(j)} \\ c_k^{(j)} \\ c_{k+1}^{(j)} \\ \vdots \\ c_{n_j}^{(j)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{n_j}^{(j)} - s_0^{(j)} \\ \left(\left(s_{n_j}^{(j)}\right)^2 - \left(s_0^{(j)}\right)^2\right)/2 \\ \vdots \\ \left(\left(s_{n_j}^{(j)}\right)^k - \left(s_0^{(j)}\right)^k\right)/k \\ \left(\left(s_{n_j}^{(j)}\right)^{k+1} - \left(s_0^{(j)}\right)^{k+1}\right)/k+1 \\ \left(\left(s_{n_j}^{(j)}\right)^{k+2} - \left(s_0^{(j)}\right)^{k+2}\right)/k+2 \\ \vdots \\ \left(\left(s_{n_j}^{(j)}\right)^{n_j+1} - \left(s_0^{(j)}\right)^{n_j+1}\right)/n+1 \end{bmatrix}$$

EJERCICIO

Resolver la integral $\displaystyle\int_0^5 \frac{1}{1+x^2}dx$

a) Analíticamente: $\int_0^5 \frac{1}{1+x^2}dx = [\tan^{-1} x]_0^5 = 1.3734 - 0 = 1.3734$

b) Empleando dos intervalos: el primero se encuentra comprendido entre 0 y 1, conteniendo 3 muestras equiespaciadas. Las fronteras del segundo son 1 y 5, conteniendo 5 puntos equiespaciados.

1- Lo primero que tenemos que hacer es encontrar los soportes
Como las muestras son equiespaciadas utilizamos la fórmula: $s_k^{(j)} = s_0^{(j)} + kh$

siendo $h = \frac{s_{n_j}^{(j)} - s_0^{(j)}}{n_j}$ la distancia entre cada punto del intervalo j-ésimo.

<u>Intervalo 1:</u> [0,1] con 3 muestras equiespaciadas entonces $n_j = 3 - 1 = 2$

$$h = \frac{1-0}{2} = 0.5$$

$$s_1^{(1)} = s_0^{(1)} + 1h = 0 + 0.5 = 0.5$$
$$s_2^{(1)} = s_0^{(1)} + 2h = 0 + 2 * 0.5 = 1$$

Entonces el soporte sería: $[0,0.5,1]$

<u>Intervalo 2:</u> [1,5] con 5 muestras equiespaciadas. Seguimos el mismo procedimiento y obtenemos: $h = 1$ y por tanto el soporte es $[1,2,3,4,5]$.

2- Lo segundo es evaluar la función subyacente en todos los puntos del soporte establecidos:

$s_k^{(1)}$	0	0.5	1
$f(s_k^{(1)})$	1	0.8	0.5

$s_k^{(2)}$	1	2	3	4	5
$f(s_k^{(2)})$	0.5	0.2	0.1	0.0588	0.0385

3- Como el soporte es equiespaciado aplicamos la fórmula de Newton Cotes con intervalos cerrados para cada intervalo.

$$\int_0^5 \frac{1}{1+x^2}dx \approx \sum_{j=1}^{2} \frac{s_{n_j}^{(j)} - s_0^{(j)}}{D_{n_j}} \left(\sum_{k=0}^{n_j} \alpha_k^{(j)} f(s_k^{(j)} \right)$$

aplicamos la fórmula en 2 intervalos y sumamos los resultados

$$= \frac{1-0}{6}(1 * 1 + 4 * 0.8 + 1 * 0.5) +$$
$$(\frac{5-1}{90}(7 * 0.5 + 32 * 0.2 + 12 * 0.0588 + 7 * 0.0385)$$

$$= 0.7833 + 0.5889 = 1.3722$$