INTERPOLACIÓN POR NEWTON

(Explicación matemática: operaciones a realizar, ejercicio propuesto en examen; algoritmo)

EXPLICACIÓN MATEMÁTICA:

La interpolación se define como un **proceso matemático empleado para predecir nuevos valores** dentro del rango de un conjunto de puntos de datos conocidos, es decir, se trata de una serie de operaciones matemáticas cuyo objetivo calcular la expresión de un polinomio con grado menor o igual a n, utilizando (n + 1) puntos prefijados en las abscisas (soporte). La interpolación de Newton es un método utilizado en el análisis numérico para **encontrar un polinomio que pase por un conjunto dado de puntos**. Dado un conjunto de puntos, el objetivo es encontrar un polinomio de **grado mínimo** que pase por todos estos puntos, proporcionando una **aproximación de la función que los genera.**

Fórmula general

La fórmula del polinomio interpolador de Newton se construye agregando las **diferencias divididas** de los puntos conocidos. Este polinomio se expresa como **una suma que incorpora factores de orden creciente** (significa que el polinomio se construye como una suma de términos, donde cada término tiene factores que crecen en orden, es decir, los factores aumentan según el grado del término) lo que nos permite ajustar el polinomio a medida que recabamos datos nuevos lo que lo consolida como una herramienta de gran utilidad en el ámbito de la investigación, sin importar el orden de los valores (el porque lo explicaremos un poco mas adelante).

Pongamos que conocemos el polinomio Pk y queremos conocer el polinomio Pk+1 debido a que se nos han proporcionado nuevos datos válidos para aquello que queremos llevar a acabo, en este caso utilizaríamos la siguiente fórmula:

$$p_{k+1}(x)=pk(x)+C_{k+1}N_{k+1}(x)$$

Sin embargo para que esta formula se cumpla en todos los casos se han de cumplir dos características:

1) Lo que en la formula hemos denominado como **N** es lo que se conoce como base, las bases son los términos que se utilizan para construir el polinomio interpolante. Estas bases son funciones que dependen de las diferencias entre los puntos de interpolación y se utilizan para obtener el valor del polinomio en un punto x dado y tienen la forma de productos de **factores de la forma (x−xi)**, donde xi es un punto de interpolación específico. Y **Nk+1 ha de corresponder con el productorio de factores del soporte anterior** de esta manera (siendo el soporte S= {s0,s1,....,sn}:

Nk+1=(x-s0)(x-s1)....(x-sn)

$$N_{k+1}(x) = \prod_{j=0}^{k}(x - s_j)$$

Debido a que se forman estas bases se cumple lo que se conoce como **“Teorema de unicidad del polinomio interpolador”** que es el nos asegura que el orden de los factores es irrelevante y por eso no importa el orden de los datos .

2)C_{k+1} es una constante que podemos calcular a partir de la formula:

$$p_{k+1}(s_{k+1})=f(s_{k+1})$$

OJO: aunque es verdad que se necesita conocer y entender estas características para comprender que es lo que estamos haciendo exactamente a la hora de afrontar el examen no son de gran importancia, es decir, si tenéis poco tiempo para prepararos esta parte del examen podéis pasar directamente a la explicación de como realizar los ejercicios (la cual encontrareis tras la teoría :))

Cálculo de diferencias divididas

Las diferencias divididas son coeficientes esenciales en el método de interpolación de Newton, calculadas de forma recursiva (esto significa que cada diferencia dividida se obtiene a partir de las diferencias divididas de orden inferior calculadas con anterioridad, esto es, el cálculo de cada diferencia dividida se basen los resultados de cálculos anteriores). El calculo de diferencias divididas que representado por la siguiente formula:

$$f[x_n, x_{n-1}, \cdots, x_1, x_0] = \frac{f[x_n, x_{n-1}, \cdots, x_1] - f[x_{n-1}, x_{n-2}, \cdots, x_1, x_0]}{x_n - x_0}$$

Sistematización de la formula de Newton (método tabla)

Por último y para saber realizar los ejercicios que caerán en el examen tenemos que aprender a sistematizar todo lo que hemos explicado antes mediante el uso de una tabla (método que vamos a explicar y usar en este caso)

Pongamos que se nos proporcionan los siguientes datos:

s:	**1**	**2**	**3**	**4**
f(x)	**10**	**20**	**35**	**60**

Teniendo en cuenta estos valores debemos rellenar la siguiente tabla:

$f[s_0]$	$f[s_0, s_1]$	$f[s_0, s_1, s_2]$	$f[s_0, s_1, s_2, s_3]$
$f[s_1]$	$f[s_1, s_2]$	$f[s_1, s_2, s_3]$	
$f[s_2]$	$f[s_2, s_3]$	0	0
$f[s_3]$	0	0	0

Y recordamos como se **calculaban las diferencias divididas**:

f[s0,s1]=f[s1]-f[s0]/(s1-s0) **f[s0,s1,s2]=f[s0,s1]-f[s1,s2]/(s2-s0)** **f[s0,s1,s2,s3]=f[s0,s1,s2]-f[s1,s2,s3]/(s3-s0)**

f[s1,s2]=f[s2]-f[s1]/(s2-s1) f[s1,s2,s3]=f[s1,s2]-f[s2,s2]/(s3-s1)

f[s2,s3]=f[s3]-f[s2]/(s3-s2)

s0=1	**f[s0]=10**	**f[s0,s1]=(20-10) /(2-1)=10**	**f[s0,s1,s2]= (15-10) /(3-1)=2,5**	**f[s0,s1,s2,s3]= (5-2,5)/(4-1)= 2,5/3**
s1=2	**f[s1]=20**	**f[s1,s2]=(35-20) /(3-2)=15**	**f[s1,s2,s3]= (25-15) /(4-2)= 5**	0
s2=3	**f[s2]=35**	**f[s2,s3]=(60-35) /(4-3)=25**	0	0
s3=4	**f[s3]=60**	0	0	0

Una vez hemos sacado las distintas diferencias divididas las aplicamos en la **fórmula general**:

Pn(x)=f[s0]+f[s0,s1](x−s0)+f[s0,s1,s2](x−s0)(x−s1)+f[s0,s1,s2,s3](x−s0)(x−s1)(x−s2)

y obtenemos el siguiente polinomio: p(x)=10+10(x−1)+2.5(x−1)(x−2)+0.8333(x−1)(x−2)(x−3)

Ahora vamos a realizar un ejercicio planteado en un examen (31/10/24):

Haz click aquí

IMPORTANTE: es posible también que nos den únicamente el soporte y la función empleada pero no el resultado ,por ejemplo:

Ejercicio 3: “Obtener el polinomio de la función f(x)=3x+2 en el soporte s={3,4,7}”

En este caso lo único que tendríamos que hacer es valorar f(x) en el soporte y ya tendríamos la tablita de datos para realizar la interpolación:

s:	**3**	|	**4**	|	**7**
f(x):	**11**	|	**14**	|	**23**