INTEGRACIÓN: EJERCICIOS

En este recurso vamos a realizar dos ejercicios sencillos de integración. El objetivo es entender como funciona la teoría mediante la práctica.
Recomendamos haber visto primero nuestro recurso de integración para tener claro los conceptos teóricos antes de empezar.

EJERCICIO 1

Siendo h un número real positivo, se considera el soporte { -2h, -h, 0, h, 2h }. Determina la fórmula de integración numérica de:

$$\int_{-2h}^{2h} f(x)\, dx$$

Solución:

Lo vamos a resolver mediante el método de los coeficientes indeterminados. Este método consiste en introducir todos los datos en una matriz y posteriormente resolverla:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ s_0 & s_1 & s_2 & \dots & s_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_0^{k-1} & s_1^{k-1} & s_2^{k-1} & \dots & s_n^{k-1} \\ s_0^k & s_1^k & s_2^k & \dots & s_n^k \\ s_0^{k+1} & s_1^{k+1} & s_2^{k+1} & \dots & s_n^{k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_0^n & s_1^n & s_2^n & \dots & s_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{k-1} \\ c_k \\ c_{k+1} \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b-a \\ (b^2-a^2)/2 \\ \vdots \\ (b^k-a^k)/k \\ (b^{k+1}-a^{k+1})/k+1 \\ (b^{k+2}-a^{k+2})/k+2 \\ \vdots \\ (b^{n+1}-a^{n+1})/n+1 \end{bmatrix}$$

Esta es la matriz que viene dada por la teoría:

- En la primera matriz debemos introducir el soporte (el cual nos dan en el enunciado). Cada punto del soporte se pone en una columna y en cada fila elevamos su valor a 0, 1, 2,...n, siendo n el número de puntos del soporte, en este caso 5.
- En la segunda matriz no tenemos que poner nada, esta será la matriz que debemos obtener pues esta contiene todos los coeficientes.
- Por último, tenemos que rellenar la última matriz, para eso debemos sustituir a y b por el intervalo. Aunque no nos lo den explícitamente, para obtenerlo solo debemos mirar la integral, esta va de -2h a 2h, los cuales serán a y b respectivamente.

De este modo la matriz queda así:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2h & -h & 0 & h & 2h \\ 4h^2 & h^2 & 0 & h^2 & 4h^2 \\ -8h^3 & -h^3 & 0 & h^3 & 8h^3 \\ 16h^4 & h^4 & 0 & h^4 & 16h^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2h + 2h \\ (4h^2 - 4h^2)/_2 \\ (8h^3 + 8h^3)/_3 \\ (16h^4 - 16h^4)/_4 \\ (32h^5 + 32h^5)/_5 \end{bmatrix}$$

Y si sacamos la h de las matrices y seguimos operando obtendremos que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ -8 & -1 & 0 & 1 & 8 \\ 16 & 1 & 0 & 1 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 16/_3 \\ 0 \\ 64/_5 \end{bmatrix} h$$

$$c_0 = \frac{14}{45}h \qquad c_1 = \frac{64}{45}h \qquad c_2 = \frac{24}{45}h = \frac{8}{15}h \qquad c_3 = \frac{64}{45}h \qquad c_4 = \frac{14}{45}h$$

Una vez obtenido este resultado, solo debemos aplicar la fórmula de integración:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n} c_j \cdot f(s_j)$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{-2h}^{2h} f(x)\,dx \approx \sum_{j=0}^{n} c_j \cdot f(s_j) \frac{14}{45}h \cdot \big(f(-2h) + f(2h)\big) + \frac{64}{45}h \cdot \big(f(-h) + f(h)\big) + \frac{8}{15}hf(0) =$$
$$= \frac{h}{45}\Big(14\big(f(-2h) + f(2h)\big) + 64\big(f(-h) + f(h)\big) + 24f(0)\Big)$$

Y como no tenemos los valores del soporte evaluados en la función, lo dejamos así.

EJERCICIO 1

Aplica la fórmula de integración obtenida en el intervalo para calcular una aproximación de:

$$\int_{-1}^{1} \left| \frac{x^3}{5} - 3x^2 + x - 2\cos\big((x^2+x)\pi\big) \right| dx$$

Solución:

Para poder resolver un ejercicio hay que comprender un concepto único de la integración, para un soporte equivalente los coeficientes de integración serán los mismos, da igual la función que tengamos.
¿Qué quiere decir esto? Pues que si una función tiene los coeficientes 2, 4 y 6 para un soporte { 1, 2, 3 }; los coeficientes en el soporte { 2, 4, 6 } serán 4, 6 y 12 respectivamente. No necesitamos volver a calcular los coeficientes, solo adaptar los del ejercicio anterior.

Como en este caso el intervalo es [-1, 1] y en el ejercicio anterior era [-2h, 2h], tan solo debemos elegir h = 1/2 para que se ajusten. De este modo el soporte corresponderá con: { -1, -1/2, 0, 1/2, 1 }

Ahora solo debemos ajustar los coeficientes del ejercicio anterior sustituyendo h por 1/2 y aplicamos la fórmula de integración:

$$c_0 = \frac{14}{45}h \qquad c_1 = \frac{64}{45}h \qquad c_2 = \frac{24}{45}h = \frac{8}{15}h \qquad c_3 = \frac{64}{45}h \qquad c_4 = \frac{14}{45}h$$

$$\downarrow$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-2h}^{2h} f(x)dx \approx$$

$$\approx \frac{1}{90}\left(14\big(f(-1)+f(1)\big) + 64\left(f\left(\frac{-1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right)\right) + 24f(0)\right) \approx 4.846882$$