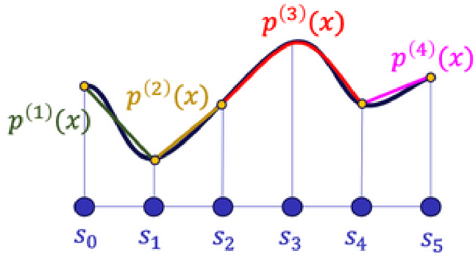
INTERPOLACIÓN POR TRAMOS PARTE I

La **interpolación por tramos** permite crear un polinomio interpolador que se asemeja más precisamente a la función subyacente puesto que permite minimizar el fenómeno de Runge. Al aumentar el número de puntos de soporte podíamos observar en la interpolación normal que los errores en los extremos aumentaban y que tener más puntos de soporte disminuía la precisión. En este caso, aprovechamos la información de manera que no nos perjudique disminuyendo el grado del polinomio interpolador al dividir el soporte en una serie de intervalos.



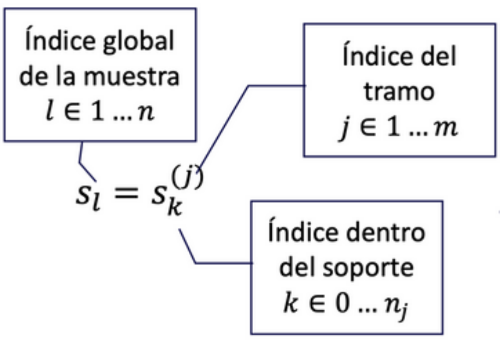
Función interpolada por tramos $v(x)$

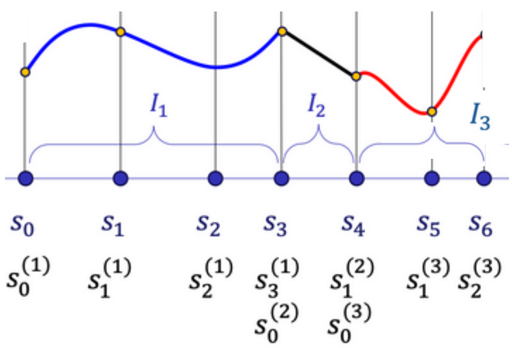
$$v(x) = \begin{cases} p^{(1)}(x) & \text{si } x \in [s_0, s_1] \\ p^{(2)}(x) & \text{si } x \in]s_1, s_2] \\ p^{(3)}(x) & \text{si } x \in]s_2, s_4] \\ p^{(4)}(x) & \text{si } x \in]s_4, s_5] \end{cases}$$

Así, si tenemos **m** intervalos con cada uno $n_j + 1$ muestras, podemos crear una función v(x) definida a trozos. Según el tamaño del intervalo, el polinomio será de grado n_j (1, 2 o 3).

$\mathcal{L}(\Delta)$ es el espacio de funciónes continuas (= pertenecientes a C^0) en $[s_0, s_n]$ tales que en cada tramo I_j localizado en el intervalo $[s_0^{(j)}, s_n^{(j)}]$ se define una expresión polinómica de grado ≤ n_j : $v^{(j)}(x) = a_0^{(j)} + a_1^{(j)}x + a_2^{(j)}x^2 + \cdots + a_{n_j}^{(j)}x^{n_j}$

Para no armarse un lío con los sub y superíndices...





Por ejemplo: tenemos 7 puntos $s_0, s_2, \dots, s_6$ (por tanto l =6) y los distribuimos de la siguiente forma con **m** = 3 intervalos

- I_1 = $[s_0^{(1)}, s_3^{(1)}]$ (4 muestras) entonces n_1 = 3 (polinomio interpolador de grado 3)
- I_2 = $]s_0^{(2)}, s_1^{(2)}]$ (2 muestras) entonces n_2 = 1 (polinomio interpolador de grado 1)
- I_3 = $]s_0^{(3)}, s_2^{(3)}]$ (3 muestras) entonces n_3 = 2 (polinomio interpolador de grado 2)

Importante: s_3 y s_4 son puntos de enganche. Es decir pertenecen estrictamente solo a un intervalo pero se utilizan para calcular los polinomios de los dos intervalos que (¡por la condición de continuidad!)

La partición Δ viene definida por **el soporte** que tiene que estar ordenado (=los puntos son consecutivos) pero no necesariamente uniforme en su globalidad (aunque uniforme dentro de los intervalos) y **por el número de intervalo m** que contienen $n_j + 1$ muestras tales que $1 + \sum_{j=1}^{m} n_j = \boxed{n+1}$ Número de muestras en el soporte

RESOLUCIÓN POR SISTEMAS DE ECUACIONES

Para cada intervalo $j - ésimo$ tenemos que determinar los $n_j + 1$ coeficientes $a_k^{(j)}$ con k $\in 0, \dots n_j$ y j $\in 0, \dots m$ . . Es decir que para cada intervalo tenemos que establecer un sistema de ecuaciones cuyo número de ecuaciones corresponde al número de muestras del intervalo.

Esas ecuaciones se obtienen al igualar el polinomio interpolador en el tramo considerado a la función subyacente evaluada en los puntos de soporte.

$$v^{(j)}\left(s_k^{(j)}\right) = f\left(s_k^{(j)}\right)$$

$n_j + 1$ incógnitas

$n_j + 1$ ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 1 & s_0^{(j)} & \left(s_0^{(j)}\right)^2 & \dots & \left(s_0^{(j)}\right)^{n_j} \\ 1 & s_1^{(j)} & \left(s_1^{(j)}\right)^2 & \dots & \left(s_1^{(j)}\right)^{n_j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & s_{n_j}^{(j)} & \left(s_{n_j}^{(j)}\right)^2 & \dots & \left(s_{n_j}^{(j)}\right)^{n_j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0^{(j)} \\ a_1^{(j)} \\ \vdots \\ a_{n_j}^{(j)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f\left(s_0^{(j)}\right) \\ f\left(s_1^{(j)}\right) \\ \vdots \\ f\left(s_{n_j}^{(j)}\right) \end{bmatrix}$$

EJERCICIO

Con la distribución del ejemplo anterior y los siguientes datos, construir el polinomio interpolador por tramos.

l	0	1	2	3	4	5	6
s_l	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(s_l)$	3	3	3	4	2	5	6

I_1 I_2 I_3

<u>En el intervalo 1:</u> tenemos 4 puntos entonces 4 ecuaciones

$$\begin{cases} f(-2) = 3 = a_0^{(1)} + a_1^{(1)} * (-2) + a_2^{(1)} * (-2)^2 + a_3^{(1)} * (-2)^3 \\ f(-1) = 3 = a_0^{(1)} + a_1^{(1)} * (-1) + a_2^{(1)} * (-1)^2 + a_3^{(1)} * (-1)^3 \\ f(0) = 3 = a_0^{(1)} + a_1^{(1)} * 0 + a_2^{(1)} * 0^2 + a_3^{(1)} * 0^3 \\ f(1) = 4 = a_0^{(1)} + a_1^{(1)} * 1 + a_2^{(1)} * 1^2 + a_3^{(1)} * 1^3 \end{cases}$$

Para simplificar, lo ponemos de forma matricial y resolvemos el sistema invirtiendo la matriz del soporte (la de la izquierda) y multiplicándola por la de la función evaluada en el soporte (la de la derecha).

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0^{(1)} \\ a_1^{(1)} \\ a_2^{(1)} \\ a_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Obtenemos los coeficientes siguientes:

$$a_0^{(1)} = 3 \ , \ a_1^{(1)} = \frac{1}{3} \ , a_2^{(1)} = \frac{1}{2} \ , a_3^{(1)} = \frac{1}{6}$$

$$v^{(1)}(x) = 3 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 \ si \ x \ \in]s_0^{(1)}, s_3^{(1)}]$$

Calcularemos los polinomios para los siguientes intervalos mediante Newton en la siguiente página.

RESOLUCIÓN POR EL MÉTODO DE NEWTON

Para cada intervalo $j-ésimo$ determinamos mediante la fórmula de Newton el polinomio interpolador calculando previamente la tabla de diferencias divididas. Es decir tendremos que hacer **m** tablas de diferencias divididas si hay m intervalos.

j indexa el intervalo

$$v^{(j)}(x) = f\left[s_0^{(j)}\right] + \sum_{k=1}^{n_j} f\left[s_0^{(j)}, s_1^{(j)}, \dots, s_k^{(j)}\right] \prod_{i=0}^{k-1}\left(x - s_i^{(j)}\right)$$

k indexa las muestras del intervalo

El tamaño de la tabla de diferencias divididas será de ($n_j + 1$ $(n_j + 1)$ (sin contar la columna del soporte) y se calculará mediante la fórmula:

$$f\left[s_0^{(j)}, s_1^{(j)}, \cdots, s_k^{(j)}\right] = \frac{f\left[s_1^{(j)}, \cdots, s_k^{(j)}\right] - f\left[s_0^{(j)}, \cdots, s_{k-1}^{(j)}\right]}{s_k^{(j)} - s_0^{(j)}}$$

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	
$s_0^{(j)}$	$f[s_0^{(j)}]$	$f[s_0^{(j)}, s_1^{(j)}]$	$f[s_0^{(j)}, s_1^{(j)}, s_2^{(j)}]$	$f[s_0^{(j)}, s_1^{(j)}, s_2^{(j)}, s_3^{(j)}]$	$i=0$
$s_1^{(j)}$	$f[s_1^{(j)}]$	$f[s_1^{(j)}, s_2^{(j)}]$	$f[s_1^{(j)}, s_2^{(j)}, s_3^{(j)}]$	0	$i=1$
$s_2^{(j)}$	$f[s_2^{(j)}]$	$f[s_2^{(j)}, s_3^{(j)}]$	0	0	$i=2$
$s_3^{(j)}$	$f[s_3^{(j)}]$	0	0	0	$i=3$

EJERCICIO

Siguiendo el ejemplo anterior…

l	0	1	2	3	4	5	6
s_l	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(s_l)$	3	3	3	4	2	5	6

I_1 I_2 I_3

En el intervalo 2: tenemos 2 puntos entonces el polinomio es una recta de la forma: $v^{(2)}(x) = f[1] + f[1,2](x-1)$ que podemos calcular directamente:

- $f[1] = f(1) = 4$
- $f[1,2] = \dfrac{f(2) - f(1)}{2-1} = \dfrac{2-4}{2-1} = -2$

Por tanto quedaría:
$v^{(3)}(x) = 4 - 2(x-1) = 6 - 2x$

En el intervalo 3: tenemos 3 puntos entonces la tabla de diferencias divididas sería la siguiente:

	k=0	k=1	k=2
$s_0^{(3)}$	$f[2]$=2	$f[2,3] = \frac{5-2}{3-2} = 3$	$f[2,3,4] = \dfrac{f[3,4] - f[2,3]}{4-2} = \dfrac{1-3}{2} = -1$
$s_1^{(3)}$	$f[3]$=5	$f[3,4] = \frac{6-5}{4-3} = 1$	0
$s_2^{(3)}$	$f[4]$=6	0	0

Y quedaría: $v^{(3)}(x) = f[2] + f[2,3](x-2) + f[2,3,4](x-2)(x-3)$

Remplazando los valores y simplificando obtenemos:

$$v^{(3)}(x) = 2 + 3(x-2) - 1(x-2)(x-3) = -x^2 + 8x - 10 \; si \; x \; \in]s_0^{(3)}, s_2^{(3)}]$$

Entonces el polinomio interpolador encontrado es el siguiente:

$$v(x) = \begin{cases} v^{(1)}(x) = 3 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}\,x^3 \; si \; x \; \in [-2,1] \\ v^{(2)}(x) = -2x + 6 \; si \; x \; \in]1,2] \\ v^{(3)}(x) = -x^2 + 8x - 10 \; si \; x \; \in]2,4] \end{cases}$$

EJERCICIO PARA ENTRENAR

En una planta de producción de propanol se ha obtenido la siguiente producción total en función del tiempo:

t (horas)	3	5	15	25	35	50
f (litros)	8	12	30	35	40	100

Obtener la cantidad producida transcurridas: (a) 4 horas y (b) 40 horas. Para ello, se realizará una interpolación polinómica a trozos formada por un polinomio de grado 3 en el intervalo [3,25] y otro de grado 2 en el intervalo [25,50].

SOLUCIÓN:

$$v(x) = \begin{cases} v^{(1)}(x) = 2.2443 \; + \; 1.8367x \; + \; 0.0339x^2 - 0.0022x^3 \; si \; x \; [3,25] \\ v^{(2)}(x) = 145 - 7.9x \; + \; 0.14x^2 \; si \; x \; \in]25,50] \end{cases}$$

(a) v(4) = 9.9925 litros

(b) v(40) = 53 litros

Polinomio obtenido mediante el método de Newton

	Orden 0	Orden 1	Orden 2	Orden 3
3	8	2.0	-0.01666667	-0.00219697
5	12	1.8	-0.06500000	0.00000000
15	30	0.5	0.00000000	0.00000000
25	35	0.0	0.00000000	0.00000000

	Orden 0	Orden 1	Orden 2
25	35	0.5	0.14
35	40	4.0	0.00
50	100	0.0	0.00