INTERPOLACIÓN: MÉTODOS DE INTERPOLACIÓN

La interpolación se refiere a la técnica de estimar valores intermedios entre puntos conocidos en un conjunto de datos. En otras palabras, se utiliza para encontrar valores dentro de un rango de datos a partir de valores discretos que ya están disponibles. Esta técnica se aplica en diversas áreas, como gráficos computacionales, análisis de datos, procesamiento de señales, entre otros.

Esta técnica resulta de gran utilidad en muchos sectores, y entre sus principales aplicaciones destacan:

- **Gráficos computacionales**: para dibujar curvas suaves a partir de puntos discretos.
- **Análisis de datos**: para estimar valores entre puntos de una tabla o serie temporal.
- **Procesamiento de imágenes**: para la ampliación o reducción de imágenes.
- **Cálculo numérico**: para resolver ecuaciones diferenciales o problemas de optimización.

Además, existen diferentes métodos de interpolación, a destacar tres: la forma matricial, la interpolación de Lagrange y la interpolación de Newton.

MÉTODOS DE INTERPOLACIÓN:

1. MATRICES O COEFICIENTES INDETERMINADOS:

Este método consiste en la elaboración de matrices para obtener los coeficientes del polinomio interpolador que se desea hallar.

Partimos de unos puntos de soporte S1,S2,S3,...Sn, y la imagen de cada uno de los puntos en la función que deseamos obtener el polinomio interpolador, f(S1), f(S2),... f(Sn).

Con estos datos se elaboran tres matrices: las imágenes forman la matriz solución (conocida), los puntos del soporte forman otra matriz de n filas por n columnas(conocida). Y la matriz de los coeficientes, que deseamos obtener, multiplica a la del soporte de esta manera:

$$\begin{pmatrix} 1 & s_1 & \cdots & s_1^{(J-1)} & \cdots & s_1^{(n-1)} \\ 1 & s_2 & \cdots & s_2^{(J-1)} & \cdots & s_2^{(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & s_I & \cdots & s_I^{(J-1)} & \cdots & s_I^{(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & s_n & \cdots & s_n^{(J-1)} & \cdots & s_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_I \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(s_1) \\ f(s_2) \\ \vdots \\ f(s_I) \\ \vdots \\ f(s_n) \end{Bmatrix}$$

La primera fila de la matriz soporte son los valores del soporte elevados a 0, la siguiente a 1, y así sucesivamente hasta llegar al número de puntos de soporte n.

- Resolución: Para obtener la matriz de los coeficientes solo hay que multiplicar la inversa de la matriz del soporte, por la matriz compuesta por las imágenes de los puntos de soporte.

2) BASES DE LAGRANGE:

La interpolación por bases de Lagrange utiliza la fórmula de Lagrange:

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n} f(s_i) \cdot L_i(x)$$

Para obtener el polinomio interpolador con esta fórmula se necesitan los puntos del soporte y sus respectivas imágenes.

- El primer paso sería el cálculo de polinomios base Li(x) mediante la fórmula:

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - s_j}{s_i - s_j}$$

Donde Si es el valor del soporte sobre el que se calcula la base, y Sj son el resto de valores del soporte. Dependiendo del número (n) de valores del soporte, esta operación habría que realizarla una o más veces.

- Con los polinomios base Li(x), solo habría que hacer un sumatorio, cada imagen multiplicando a su respectivo polinomio base. Por ejemplo S1 multiplicaría a L1(x), y así sucesivamente.

De esta suma resultaría el polinomio interpolador.

3) FÓRMULA DE NEWTON:

En la interpolación mediante la fórmula de Newton se pueden seguir dos “rutas”, para las dos es necesario calcular las diferencias divididas de los puntos del soporte mediante la fórmula

$$f[s_0, s_1, s_2, \cdots, s_n] = \frac{f[s_1, s_2, \cdots, s_n] - f[s_0, s_1, s_2, \cdots, s_{n-1}]}{s_n - s_0}$$

Por un lado se puede elaborar una tabla con todas las diferencias divididas, f[S0,S1], f[S0,S1,S2]... para después aplicar la fórmula de Newton:

Tabla de diferencias divididas

x	$f(x_0)$	$f[x_0, x_1]$	$f[x_0, x_1, x_2]$	$\cdots$	$f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$
x_0	y_0	$\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$	$\frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$	$\cdots$	$\cdots$
x_1	y_1	$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$	$\frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$	$\cdots$	$\cdots$
x_2	y_2	$\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}$	$\frac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}$	$\cdots$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_n	y_n	$f[x_n, x_{n+1}]$	$\cdots$	$\cdots$	$f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$

Fórmula de Newton

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f[s_0, s_1, \ldots, s_i] \prod_{j=0}^{i-1} (x - s_j)$$

Por otro lado se puede ir calculando las diferencias divididas a medida que sea necesario para seguir construyendo el polinomio interpolador.

En esencia los dos procesos son iguales y se llega al mismo resultado, pero es importante utilizar el que se te haga más cómodo de manejar.