Resolución de ejercicios del primer parcial: Segundo Ejercicio (Interpolación)

Enunciado

Pregunta 2

Un laboratorio farmacéutico está estudiando los efectos de un medicamento en el cuerpo humano a lo largo del tiempo. Para ello, se ha medido la concentración del medicamento en sangre (en mg/L) en diferentes momentos después de su administración inicial a 50 pacientes diferentes. Además, se ha monitorizado el número de latidos por minuto (frecuencia cardíaca) de estos mismos sujetos.

En promedio, para todos los individuos, se han obtenido los siguientes datos:

Tiempo (horas)	0	1	3	4
Concentración (mg/L)	50	35	20	5
Frecuencia cardíaca (lpm)	78	76	75	76

a) Encuentra el polinomio interpolador de Lagrange que describe la concentración del medicamento en función del tiempo usando la tabla de diferencias divididas de Newton.

b) Encuentra el polinomio interpolador de Lagrange para la frecuencia cardíaca (puedes emplear el método que consideres conveniente).

c) Utiliza el polinomio interpolador para estimar la concentración del medicamento a las 2 horas.

d) Aporta una aproximación de la concentración del medicamento en sangre para un instante en el que, en promedio, se han obtenido 77 pulsaciones por minuto entre los individuos involucrados en el experimento.

Este segundo ejercicio contaba 5 puntos sobre 10

Para resolver este ejercicio, es importante comprender la teoría de interpolación y de diferencias divididas. Aunque esté permitida una chuleta, si no se sabe lo que se está haciendo, es muy fácil cometer errores. Además, hay que tener mucho cuidado a la hora de calcular, ya que un fallo a la hora de, por ejemplo, multiplicar, puede llevar a que un apartado entero esté mal.

Apartado a)

Los soportes son los datos del tiempo (horas) que nos dan. En este caso, $s_0=0$, $s_1=1$, $s_2=3$, $s_3=4$

En este primer apartado nos piden que describamos la concentración, así que $f[s_i]$ son los datos de la concentración que nos dan: $f[s_0]=50$, $f[s_1]=35$, $f[s_2]=20$, $f[s_3]=5$.

Primero, comenzamos con la definición de diferencias divididas:

$$f[s_0, s_1, s_2, \cdots, s_n] = \frac{f[s_1, s_2, \cdots, s_n] - f[s_0, s_1, s_2, \cdots, s_{n-1}]}{s_n - s_0}$$

Teniendo esto claro y conociendo cuáles son los datos que debemos usar, creamos la tabla de diferencias divididas:

$s_0 = 0$	$f[0] = 50$	$f[0,1] = -15$	$f[0,1,3] = 2.5$	$f[0,1,3,4] = -1.25$
$s_1 = 1$	$f[1] = 35$	$f[1,3] = -7.5$	$f[1,3,4] = -2.5$	
$s_2 = 3$	$f[3] = 20$	$f[3,4] = -15$		
$s_3 = 4$	$f[4] = 5$			

Es importante hacer los cálculos de la tabla bien, siguiendo el orden a la hora de calcularla, como se muestra a continuación:

	$j = 0$	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	
s_0	$f[s_0]$	$f[s_0, s_1]$	$f[s_0, s_1, s_2]$	$f[s_0, s_1, s_2, s_3]$	$f[s_0, s_1, s_2, s_3, s_4]$	$i = 0$
s_1	$f[s_1]$	$f[s_1, s_2]$	$f[s_1, s_2, s_3]$	$f[s_1, s_2, s_3, s_4]$	0	$i = 1$
s_2	$f[s_2]$	$f[s_2, s_3]$	$f[s_2, s_3, s_4]$	0	0	$i = 2$
s_3	$f[s_3]$	$f[s_3, s_4]$	0	0	0	$i = 3$
s_4	$f[s_4]$	0	0	0	0	$i = 4$

Una vez tenemos la tabla de diferencias divididas, solo quedaría calcular el polinomio interpolador. En este caso sería un polinomio de grado 3, así que la fórmula que le corresponde es la siguiente:

El polinomio interpolador correspondiente a estas cuatro muestras será:

$$p_{\text{conc}}(x) = f[s_0] + f[s_0, s_1](x - s_0) + f[s_0, s_1, s_2](x - s_0)(x - s_1) + f[s_0, s_1, s_2, s_3](x - s_0)(x - s_1)(x - s_2)$$

Sustituyendo los valores obtenidos:

$$p_{\text{conc}}(x) = 50 - 15x + 2.5x(x - 1) - 1.25x(x - 1)(x - 3)$$

Que en forma canónica es:

$$p_{\text{conc}}(x) = -\frac{5x^3}{4} + \frac{15x^2}{2} - \frac{85x}{4} + 50$$

Apartado b)

Lo que se nos pide en el apartado b es similar al a, solo que con otros datos.

Los soportes son los datos del tiempo (horas) que nos dan. Esto no cambia. Siguen siendo s_0=0, s_1=1, s_2=3, s_3=4.

En este segundo apartado nos piden que describamos la frecuencia cardiaca, así que $f[s_i]$ son los datos de la frecuencia que nos dan: $f[s_0]$=78, $f[s_1]$=76, $f[s_2]$=75 , $f[s_3]$=76 .

La resolución del profesor está realizada en los tres métodos de interpolación que conocemos, así que vamos a mostrar los tres. Personalmente, desde el grupo **recomendamos la resolución por Newton**, ya que es la más práctica. Aunque sea, quizás, a la que más cuesta acostumbrarse, es sin duda la más beneficiosa, ya que al tener que hacer la tabla de diferencias divididas se esclarecen mucho las operaciones y hay menos rango de error.

Resolución por sistema de ecuaciones:

A partir de los cuatro puntos ancla proporcionados, el polinomio interpolador se corresponde con un polinomio de grado 3 de la forma:

$$p_{\text{lat}}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

Para determinar los coeficientes a_0, a_1, a_2 y a_3, planteamos el siguiente sistema de ecuaciones usando los puntos (0,78), (1,76), (3,75), (4,76):

$$\begin{bmatrix} (s_0)^0 & s_0 & (s_0)^2 & (s_0)^3 \\ (s_1)^0 & s_1 & (s_1)^2 & (s_1)^3 \\ (s_2)^0 & s_2 & (s_2)^2 & (s_2)^3 \\ (s_3)^0 & s_3 & (s_3)^2 & (s_3)^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(s_0) \\ f(s_1) \\ f(s_2) \\ f(s_3) \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 27 & 64 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 78 \\ 76 \\ 75 \\ 76 \end{bmatrix}$$

De la primera ecuación se deduce que $a_0 = 78$. Sustituyendo este valor en las tres ecuaciones restantes:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = -2 \\ 3a_1 + 9a_2 + 27a_3 = -3 \\ 4a_1 + 16a_2 + 64a_3 = -2 \end{cases} \qquad a_1 = -\frac{5}{2}, \qquad a_2 = \frac{1}{2}, \qquad a_3 = 0$$

Por lo tanto, el polinomio interpolador es:

$$p_{\text{lat}}(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{5x}{2} + 78$$

De nuevo, la máxima complicación que tiene este apartado es hacer bien los cálculos, ya que al tener una chuleta y entender bien qué datos estamos usando, el planteamiento es sencillo. Simplemente hay que rellenar esa matriz con los datos del soporte y f[s_i], realizarla, y luego resolver el sistema de ecuaciones para obtener todos los a necesarios.

Resolución por la base de Lagrange:

El polinomio interpolador $p_{\text{lat}}(x)$ también puede expresarse mediante la base de Lagrange:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} f(s_i) \mathrm{L}_i(x) \qquad \text{siendo} \qquad \mathrm{L}_i(x) = \prod_{\substack{0 \le j \le n \\ j \ne i}} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Primero calculamos los polinomios que forman la base:

$$\mathrm{L}_0(x) = -\frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(0-1)(0-3)(0-4)} = -\frac{x^3}{12} + \frac{2x^2}{3} - \frac{19x}{12} + 1$$
$$\mathrm{L}_1(x) = \frac{x(x-3)(x-4)}{(1-0)(1-3)(1-4)} = \frac{x^3}{6} - \frac{7x^2}{6} + 2x$$
$$\mathrm{L}_2(x) = -\frac{x(x-1)(x-4)}{(3-0)(3-1)(3-4)} = -\frac{x^3}{6} + \frac{5x^2}{6} - \frac{2x}{3}$$
$$\mathrm{L}_3(x) = \frac{x(x-1)(x-3)}{(4-0)(4-1)(4-3)} = \frac{x^3}{12} - \frac{x^2}{3} + \frac{x}{4}$$

Y, mediante la definición del polinomio interpolador:

$$p_{\text{lat}}(x) = \sum_{i=0}^{n} f(s_i) \mathrm{L}_i(x) =$$
$$= 78\left(-\frac{x^3}{12} + \frac{2x^2}{3} - \frac{19x}{12} + 1\right) + 76\left(\frac{x^3}{6} - \frac{7x^2}{6} + 2x\right) + 75\left(-\frac{x^3}{6} + \frac{5x^2}{6} - \frac{2x}{3}\right) + 76\left(\frac{x^3}{12} - \frac{x^2}{3} + \frac{x}{4}\right)$$

$$p_{\text{lat}}(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{5x}{2} + 78$$

Resolución por el método de diferencias divididas (Newton):

Construimos la tabla de diferencias divididas para los puntos:

$s_0 = 0$	$f[0] = 78$	$f[0,1] = -2$	$f[0,1,3] = 0.5$	$f[0,1,3,4] = 0$
$s_1 = 1$	$f[1] = 76$	$f[1,3] = -0.5$	$f[1,3,4] = 0.5$	
$s_2 = 3$	$f[3] = 75$	$f[3,4] = 1$		
$s_3 = 4$	$f[4] = 76$			

Una vez disponemos de la tabla de diferencias divididas, procedemos a calcular el polinomio interpolador del mismo modo que en el primer apartado:

$$p_{\text{lat}}(x) = f[0] + f[0,1](x-0) + f[0,1,3](x-0)(x-1) + f[0,1,3,4](x-0)(x-1)(x-3) =$$

$$= 78 - 2(x-0) + 0.5(x-0)(x-1) + 0(x-0)(x-1)(x-3) = \frac{x(x-1)}{2} - 2x + 78$$

$$p_{\text{lat}}(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{5x}{2} + 78$$

Todos los métodos evaluados producen el mismo polinomio, cumpliendose el teorema de unicidad del polinomio interpolador.

Como se indica en la resolución, todos los métodos dan el mismo resultado. Al final depende de cada uno elegir qué método quiere usar, aquel que le resulte más sencillo o práctico.

Apartado c)

Nos pide que usemos el polinomio interpolador para calcular la concentración de medicamento a las 2 horas. Debemos usar el polinomio obtenido en el apartado a, el cual analizaba la concentración en función del tiempo, y sustituir la x por 2. La complicación de este apartado reside solamente en realizar los cálculos correctamente.

¡Cuidado! Si has calculado mal el polinomio en el apartado a, probablemente no tengas todos los puntos correspondientes a este apartado, ya que, aunque hagas bien el cálculo aquí, el resultado es erróneo. ¡Por ello es importante revisar los cálculos!

El resultado de este apartado es:

$$p_{\text{conc}}(2) = 27.5 \text{ mg/L}$$

Apartado d)

Este apartado es similar al c, ya que debemos usar los polinomios en un caso específico, pero tiene un grado más de complicación.

Nos pide que encontremos la concentración para un promedio de 77 pulsaciones por minuto. Lo que debemos hacer es igualar el polinomio del apartado b a 77, para descubrir en qué tiempo (x) nos dan 77 pulsaciones.

Una vez tengamos la x, la sustituimos en el polinomio del apartado a, igual que en el apartado c. De la misma forma, es importante no cometer fallos de cálculo, al igual que es muy importante saber analizar los resultados que me salen para la x para saber cuál debo usar.

Primero, determinamos el tiempo en el que la frecuencia cardíaca promedio es de 77 pulsaciones por minuto partiendo del polinomio interpolador de los latidos:

$$p_{\text{lat}}(x) = 77 = \frac{x^2}{2} - \frac{5x}{2} + 78 \quad \rightarrow \quad x^2 - 5x + 2 = 0$$

Las dos posibles soluciones a este problema son $x = \frac{5 \pm \sqrt{25-4\cdot 2}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2} \rightarrow x_1 \approx 4.561$ y $x_2 \approx 0.439$.

Dado que el intervalo de validez del polinomio interpolador es$[0,4]$, la solución válida es $x_2 \approx 0.439$.

Evaluamos la concentración del medicamento en sangre para ese instante temporal mediante el polinomio interpolador calculado en el apartado a):

$$p_{\text{conc}}(0.439) \approx 42.0109 \text{ mg/L}$$

Presta atención al análisis de qué x escoger como solución. El rango de elementos del soporte, como indica, es [0,4]. Esto quiere decir que la hora más grande analizada son 4 horas. Por ello, el resultado de x=4,561 no nos valdría, ya que se sale del rango establecido.

Programa en R

El programa en R de este ejercicio, resuelto por diferencias divididas, se vería de la siguiente manera. Necesitaríamos diferentes funciones que vienen a continuación.

Funciones:

```r
#---------FUNCIONES
diferencias_divididas <- function(x, y) {
  n <- length(x) - 1

  # Inicializar la matriz para almacenar las diferencias divididas
  tabla <- matrix(0, nrow = n + 1, ncol = n + 1)

  # La primera columna son los valores de y
  tabla[, 1] <- y

  # Calcular las diferencias divididas
  for (j in 2:(n + 1)) {
    for (i in 1:(n + 2 - j)) {
      tabla[i, j] <- (tabla[i + 1, j - 1] - tabla[i, j - 1]) / (x[i + j - 1] - x[i])
    }
  }

  # Nombrar las filas y columnas
  rownames(tabla) <- x
  colnames(tabla) <- paste0("Orden ", 0:n)

  return(tabla)
}

polinomio_newton <- function(tabla_dif_div, x_orig, x_eval) {
  n <- ncol(tabla_dif_div) - 1
  coef <-  as.numeric(tabla_dif_div[1, ])

  p <- function(x) {
    resultado <- coef[1]
    producto <- 1
    for (i in 2:(n + 1)) {
      producto <- producto * (x - x_orig[i - 1])
      resultado <- resultado + coef[i] * producto
    }
    return(resultado)
  }

  return(sapply(x_eval, p))
}
```

```r
### opciones menos elegantes
polinomio_newton_sin_funcion_interna <- function(tabla_dif_div, x_orig, x_eval) {
  n <- ncol(tabla_dif_div) - 1
  coef <- tabla_dif_div[1, ]

  # Inicializar un vector para almacenar los resultados
  resultados <- numeric(length(x_eval))

  for (k in seq_along(x_eval)) {
    x <- x_eval[k]
    resultado <- coef[1]  # Término constante
    for (i in 1:n) {
      producto <- 1
      for (j in 1:i) {
        producto <- producto * (x - x_orig[j])
      }
      resultado <- resultado + coef[i + 1] * producto
    }
    resultados[k] <- resultado
  }
  return(resultados)
}
polinomio_newton_con_funcion_interna <- function(
    tabla_dif_div,
    x_orig,
    x_eval)
{
  n <- ncol(tabla_dif_div) - 1
  coef <- as.numeric(tabla_dif_div[1, ])

  p <- function(x) {
    resultado <- coef[1]
    for (i in 1:n) {
      producto <- 1
      for (j in 1:i) {
        producto <- producto * (x - x_orig[j])
      }
      resultado <- resultado + coef[i + 1] * producto
    }
    return(resultado)
  }
```

```r
dibujar_canonicos <- function(x_orig, coeficientes) {
  # Crear una función para el polinomio
  polinomio <- function(x) {
    suma <- 0
    for (i in 1:length(coeficientes)) {
      suma <- suma + coeficientes[i] * x^(i-1)
    }
    return(suma)
  }

  # Determinar el rango para x
  x_min <- min(x_orig)
  x_max <- max(x_orig)
  rango <- x_max - x_min

  # Crear un vector de valores x para una curva suave
  x <- seq(x_min - 0.1*rango, x_max + 0.1*rango, length.out = 1000)

  # Calcular los valores y correspondientes
  y <- sapply(x, polinomio)

  # Crear la gráfica
  plot(x, y, type = "l", col = "blue",
       main = "Gráfica del Polinomio Canónico",
       xlab = "x", ylab = "y",
       xlim = c(min(x), max(x)), ylim = range(y))

  # Añadir puntos para el soporte original
  points(x_orig, sapply(x_orig, polinomio), col = "red", pch = 19)
}


polinomio_newton_canonico <- function(tabla_dif_div, x_orig) {
  # Determinar el grado del polinomio
  n <- length(tabla_dif_div[1, ]) - 1

  # Extraer los coeficientes de Newton desde la primera fila de la tabla de diferencias divididas
  coef_newton <- as.numeric(tabla_dif_div[1, ])

  # Inicializar el polinomio con el término constante
```

(Top Level) R Script

```r
  # Extraer los coeficientes de Newton desde la primera fila de la tabla de diferencias divididas
  coef_newton <- as.numeric(tabla_dif_div[1, ])

  # Inicializar el polinomio con el término constante
  pol <- c(coef_newton[1])

  prod_pol <- 1

  for (i in 2:(n+1))
  {
    prod_pol = c(0,prod_pol)-c(prod_pol,0)*x_orig[i-1]
    pol=c(pol,0)+coef_newton[i]*prod_pol
  }
  # Imprimir la ecuación del polinomio
  cat("Ecuación del polinomio:\n")
  cat("p(x) = ")
  for (i in 1:length(pol)) {
    if (i > 1 && pol[i]>0) cat(" + ")
    cat(sprintf("%.4f", pol[i]))
    if (i > 1) cat(sprintf("x^%d", i-1))
  }
  cat("\n")


  return(pol)
}
```

Apartados A, B Y C

```r

#-------APARTADO A
x <- c(0, 1, 3, 4)    # Valores de si
y <- c(50, 35, 20, 5) # Valores de f[si]
tabla <- diferencias_divididas(x, y)
print(tabla)
x_eval <- c(0,1,3,4) # Valores donde evaluar
y_eval <- polinomio_newton(tabla, x, x_eval)
coef_canonic <- polinomio_newton_canonico(tabla, x)
dibujar_canonicos(x, coef_canonic)

#-------APARTADO B
x <- c(0, 1, 3, 4)    # Valores de si
y <- c(78, 76, 75, 76) # Valores de f[si]
tabla <- diferencias_divididas(x, y)
print(tabla)
x_eval <- c(0, 1, 3, 4) # Valores donde evaluar
y_eval <- polinomio_newton(tabla, x, x_eval)
coef_canonic <- polinomio_newton_canonico(tabla, x)
dibujar_canonicos(x, coef_canonic)

#--------APARTADO C
x<- c(0, 1, 3, 4)    # Valores de si
y <- c(50, 35, 20, 5) # Valores de f[si]
tabla <- diferencias_divididas(x, y)
print(tabla)
x_eval <- 2 #¡AHORA QUIERO EVALUAR EN X=2!
y_eval <- polinomio_newton(tabla, x, x_eval)
print (y_eval)
#aqui ya no me hace falta dibujar ni los coeficientes canónicos. Solo quiero evaluar
#el polinomio en x=2


```

¡Atención! Para el apartado d hacen falta algunas funciones que no hemos dado, ya que no se puede despejar x de forma fácil, por lo que no podríamos resolver el apartado en R. La primera parte es la que no sabríamos hacer, pero la segunda parte sería igual que en el apartado c.

Podrás descargar un archivo de notas para hacer copia y pega en R.