Interpolación

Mediante sistemas de ecuaciones

La **interpolación** es un método que se utiliza para encontrar una **función** que pase por un conjunto de puntos, que forman el soporte. Normalmente se utilizan los métodos de Lagrange o Newton, pero resolviendo un **sistema de ecuaciones** podemos hallar los coeficientes del **polinomio interpolador**.

Sistema de ecuaciones:

Para un **conjunto de puntos** dados (x_1, y_1), (x_2, y_2), …, (x_n, y_n), se debe encontrar un polinomio que interpole estos puntos, de **grado n-1**.
Su ecuación general es:

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1}$$

La idea es encontrar los **coeficientes** $(a_0, a_1, \ldots)$, y para ello, los puntos dados se sustituyen en la ecuación general, tal que:

$$a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \ldots + a_{n-1}x_1^{n-1} = y_1$$

$$a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + \ldots + a_{n-1}x_2^{n-1} = y_2$$

$$a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \ldots + a_{n-1}x_n^{n-1} = y_n$$

Así forma un **sistema de n ecuaciones con n incógnitas**.

Matriz:

La matriz del sistema se construye de la siguiente manera:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{bmatrix}}_{M} \underbrace{\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix}}_{a} = \underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}}_{b}$$

La **matriz M** corresponde a los **valores del soporte**, siendo la primera columna de 1, ya que en la ecuación general, el valor a0 está multiplicado por x^0, que siempre será 1 sin importar el valor del soporte. Todos ellos están elevados a la n-1.

La **matriz a** corresponde a nuestra incógnita, el **valor de los coeficientes** que queremos hallar.

La **matriz b** corresponde a los **valores del polinomio** en cada punto del soporte.

Resolución:

Hay dos maneras de resolver este sistema.

- Se puede resolver como un **sistema de ecuaciones**, con tantas ecuaciones como incógnitas, siguiendo este estilo:

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_{n-1}x_1^{n-1} = y_1 \\ a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + \dots + a_{n-1}x_2^{n-1} = y_2 \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_{n-1}x_n^{n-1} = y_n \end{cases}$$

Sin embargo, cuando la n es muy grande, se complica resolver el sistema.

- También se puede resolver de **forma matricial**. Siendo la fórmula de la matriz M*a=b, hallando la inversa de M se deja la incógnita a un lado y se resuelve normalmente.

$$M^{-1}*M*a = M^{-1}*b \rightarrow Id*a = M^{-1}*b \rightarrow a = M^{-1}*b$$

Ejemplo:

Con los puntos (1,2), (2,3), (3,5), se debe encontrar un polinomio que pase por ellos. Al haber 3 puntos, eso significa n=3, por lo que el polinomio debe ser n-1, es decir, un polinomio de grado 2.

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

Sustituyendo los puntos en la ecuación, nos queda un sistema tal que:

$$\begin{cases} P(x_1) = a_0 + a_1(1) + a_2(1)^2 = 2 \\ P(x_2) = a_0 + a_1(2) + a_2(2)^2 = 3 \\ P(x_3) = a_0 + a_1(3) + a_2(3)^2 = 5 \end{cases}$$

Y la matriz queda así:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Resolviendo el sistema ó la matriz, los coeficientes resultantes son:

$$a_0 = 2;\ a_1 = -1/2;\ a_2 = 1/2$$

Por lo que el polinomio resultante quedaría de esta forma:

$$P(x) = 2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x$$

El polinomio se vería de esta manera si lo graficamos en R. Los puntos rojos corresponden a los valores dados, es decir, los puntos del soporte y el valor de la función en dicho soporte. La línea azul es el polinomio, cuyo objetivo era pasar por todos los puntos.